

Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans une ville, un service périscolaire comptabilise 150 élèves inscrits en septembre 2014. On admet que, chaque année, 80 % des élèves inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il aura 40 nouveaux élèves inscrits. La capacité d'accueil du périscolaire est de 190 élèves maximum. On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au périscolaire en septembre de l'année 2014+n, avec n un nombre entier naturel. On a donc $u_0 = 150$.

1. Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au périscolaire en septembre 2015.

2. Pour tout entier naturel n , justifier que $u_{n+1} = 0,8u_n + 40$

3. On donne l'algorithme suivant :

Initialisation : Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 150.
Traitement : Tant que $U < 190$
 n prend la valeur $n+1$
 U prend la valeur $0,8U+40$
Fin Tant que
Sortie : Afficher le nombre 2014+n

a. Recopier et compléter le tableau suivant par autant de colonnes que nécessaire pour réinscrire l'exécution de l'algorithme. Arrondir les résultats au centième.

Valeur de n	0	1	2	
Valeur de U	150			
Condition $U \leq 190$	vraie			

b. En déduire l'affichage obtenu en sortie de l'algorithme et interpréter ce résultat.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.

b. Pour tout entier naturel n , démontrer que $u_n = 200 - 50 \times 0,8^n$

c. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que : $200 - 50 \times 0,8^n > 190$

d. A partir de quelle année la directrice du périscolaire sera-t-elle obligée de refuser des inscriptions faute de places disponibles ?

CORRECTION

1. 80 % des élèves inscrits au périscolaire, en septembre 2014, seront inscrits en septembre 2015

$$\text{soient : } \frac{80}{100} \times 150 = 120.$$

Il y aura aussi 40 nouveaux inscrits donc le nombre d'élèves inscrits au périscolaire, en septembre 2015, est : $120 + 40 = \underline{160}$.

2. Pour tout entier naturel n :

u_n est le nombre d'élèves inscrits au périscolaire en septembre 2014+n

u_{n+1} est le nombre d'élèves inscrits au périscolaire en septembre 2014+n+1.

Le nombre d'élèves inscrits au périscolaire en 2014+n+1 est la somme de 80 % des élèves inscrits en septembre 2014+n et de 40 nouveaux inscrits.

$$\text{On obtient } u_{n+1} = \frac{80}{100} \times u_n + 40 = 0,8 u_n + 40$$

- 3.a. En utilisant la calculatrice, on obtient les valeurs que l'on reporte dans le tableau suivant :

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de U	150	160	198	174.4	179.52	183.62	186.89	189.51	191.61
Condition $U \leq 190$	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	fausse

- b. En utilisant l'algorithme on obtient comme affichage : **8** (la valeur de n)

Interprétation

En $2014+8=2012$, le nombre de demandes d'inscription sera pour la première fois supérieur à 190.

4. Pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_n - 200 \text{ donc } u_n = v_n + 200$$

- a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0,8 u_n + 40 - 200 = 0,8(v_n + 200) - 160 = 0,8 v_n + 160 - 160 = 0,8 v_n$

(v_n) est donc la suite géométrique de raison $q=0,8$ et de premier terme :

$$v_0 = u_0 - 200 = 150 - 200 = -50$$

- b. Pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times q^n = -50 \times 0,8^n$$

$$\text{Or } u_n = v_n + 200 = -50 \times 0,8^n + 200 = 200 - 50 \times 0,8^n$$

- c. $200 - 50 \times 0,8^n > 190 \Leftrightarrow 200 - 190 > 50 \times 0,8^n \Leftrightarrow 10 > 50 \times 0,8^n \Leftrightarrow \frac{10}{50} > 0,8^n \Leftrightarrow 0,2 > 0,8^n$

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \ln(0,2) > \ln(0,8^n) \Leftrightarrow \ln(0,2) > n \ln(0,8)$$

$$0 < 0,8 < 1 \text{ donc } \ln(0,8) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)} < n$$

$$\text{En utilisant la calculatrice : } \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)} = 7,21 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

n est un entier naturel donc le plus petit entier naturel n solution de l'inéquation est : **8**.

- d. La directrice du périscolaire sera obligée de refuser des inscriptions faute de places disponibles à compter de septembre $2014+8=2022$.