Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

L'été un centre de loisirs propose aux adolescents la pratique du canoë-kayak ou de la planche à rame.
Tous les matins, chaque adolescent doit choisir un et un seul sport parmi les deux proposés.
On admet que :

- si l'adolescent choisit le canoë-Kayak un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse la planche à rame le jour suivant est égale à 0,4 ;
- si l'adolescent choisit la planche à rame un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse le canoë-kayak le jour suivant est égale à 0,2 ;
- le premier jour, la proportion d'adolescents qui choisissent le canoë-kayak est égale à 0,85.

On note :

- K l'état : « l'adolescent choisit le canoê-kayak » ;
- $\bar{K}$ l'état : « l'adolescent choisit la planche à rame »

On note pour tout entier pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

- p_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse le canoê-kayak lors du $n^{\text{ième}}$ jour ;
- q_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse la planche à rame lors du $n^{\text{ième}}$ jour ;
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice liigne donnant l'état probabiliste lors du $n^{\text{ième}}$ jour.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets K et $\bar{K}$.

2. Donner la matrice de transition M associé à ce graphe, les sommets K et $\bar{K}$ étant classés dans cet ordre.

3. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}$.

4. Avec la calculatrice, déterminer l'état probabiliste lors du $3^{\text{ème}}$ jour.

5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, montrer que $p_{n+1} = 0,4\,p_n + 0,2$

6. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation : Choisir un nombre entier naturel $N \geqslant 2$
p prend la valeur 0,85
Traitement : Pour i allant de 2 à N
p prend la valeur 0,4p+0,2
Fin Pour
Sortie : Afficher p

a. Pour la valeur $N=5$ saisie, recopier et compléter le tableau suivant par autant de colonnes que nécessaire pour transcrire l'exécution de l'algorithme. Arrondir les résultats au millième.

Valeur de i		2		
Valeur de p	0.85			

b. En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de N saisie est 5.

c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme.

Partie B

D'après la partie A, on sait que $p_{n+1}=0,4\,p_n+0,2$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

On admet que $p_n=\frac{31}{60}\times 0,4^{n-1}+\frac{1}{3}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1. Conjecturer la limite de la suite (p_n) .

2. Interpréter le Résultat.

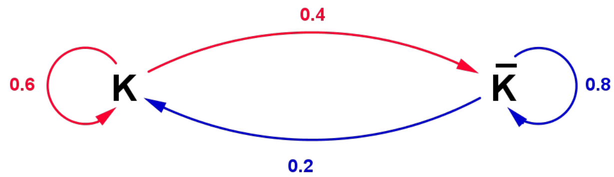
CORRECTION

Partie A

1. « Si un adolescent choisit le canoê-kayak un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse la planche à rame le jpour suivant est égale à 0,4 » donc la probabilité qu'il choisisse le canoê-kayak le jour suivant est $1-0{,}4=0{,}6$.
Conséquence
Le poids de l'arête $K\bar{K}$ est 0,4 et le poids de l'arête KK est 0,6.

. « Si adolescent choisit la planche à rame un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse le canoê-kayak le jour suivant est 0,2 » donc la probabilité qu'il choisisse la planche à rame le jour suivant est : 1-0,2=0,8.
Conséquence
Le poids de l'arête $\bar{K}K$ est : 0,2 et le poids de l'arête $\bar{K}\bar{K}$ est $1-0{,}2=0{,}8$.

. On obtient le graphe probabiliste suivant :



2. On utilise les matrices lignes et l'ordre des sommets est K et $\bar{K}$
La matrice de transition est :

$$M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

m_{11} est le poids de l'arête KK : 0,6
m_{12} est le poids de l'arête $K\bar{K}$: 0,4
m_{21} est le poids de l'arête $\bar{K}K$: 0,2
m_{22} est le poids de l'arête $\bar{K}\bar{K}$: 0,8

$$M=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

3. « Le premier jour, l'adolescents qui choisissent le canoê-kayak est égale à 0,85 »
donc $p_1=0{,}85$ et $q_1=1-0{,}85=0{,}15$ et $P_1=\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \end{pmatrix}$

4. $P_2=\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}85\times0{,}6+0{,}15\times0{,}2 & 0{,}85\times0{,}4+0{,}15\times0{,}8 \end{pmatrix}$

$P_2=\begin{pmatrix} 0{,}51+0{,}03 & 0{,}34+0{,}12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}46 \end{pmatrix}$

$P_3=\begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}46 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}54\times0{,}6+0{,}46\times0{,}2 & 0{,}54\times0{,}4+0{,}46\times0{,}8 \end{pmatrix}$

$P_3=\begin{pmatrix} 0{,}324+0{,}092 & 0{,}216+0{,}368 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}416 & 0{,}584 \end{pmatrix}$

5. Pour tout entier , non nul, n on a :
$p_n+q_n=1$ et $P_{n+1}=P_nM$

$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}6\,p_n+0{,}2\,q_n & 0{,}4\,p_n+0{,}8\,q_n \end{pmatrix}$

donc $p_{n+1}=0{,}6\,p_n+0{,}2\,q_n$ et $q_{n+1}=0{,}4\,p_n+0{,}8\,q_n$ or $q_n=1-p_n$
$p_{n+1}=0{,}6\,p_n+0{,}2(1-p_n)=0{,}6\,p_n+0{,}2-0{,}2\,p_n=0{,}4\,p_n+0{,}2$

6.a. $p_2=0,4\times0,85+0,2=0,34+0,2=0,54$

$p_3=0,4\times0,54+0,2=0,216+0,2=0,416$

$p_4=0,4\times0,416+0,2=0,1664+0,2=0,3664$ $p_4=0,366$ **à** 10^{-3} près

$p_5=0,4\times0,3664+0,2=0,14656+0,2=0,34656$ $p_5=0,347$ à 10^{-3} près

On donne les résultats dans un tableau

Valeur de i		2	3	4	5
Valeur de p	0.85	0.54	0.416	0.366	0.347

b. La valeur affichée est : **0,347**

c. La proortion d'adolescents qui choisissent le canoë-kayak, le cinquième, est : 0,347 ou 34,7 % des adolescents choisissent le canoë-Kayak le $5^{\text{ème}}$ jour.

Partie B

On admet que pour tout entier naturel non nul n : $p_n=\frac{31}{60}\times4^{n-1}+\frac{1}{3}$

1. $0<0,4<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^{n-1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=\frac{1}{3}$

2. Pour n « assez grand », $\frac{1}{3}$ des adolescents choisent le canoë-kayak et $\frac{2}{3}$ la planche à rame.