## Exercice 4 — 6 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0;10] par : $f(x)=(2x-5)e^{-x+4}+20$

**Partie A**

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle [0;10], $f'(x)=(-2x+7)e^{-x+4}$.

2. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle [0;10]. Si nécessaire, arrondir au millième les valeurs présentes dans le tableau de variation.

3. Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur [0;10] et déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de $\alpha$.

4. On admet que la fonction F définie sur [0;10] par : $F(x)=(-2x+3)e^{-2x+4}+20x$ est une primitive de f sur [0;10].
Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0;10]. Arrondir le résultat au millième.

**Partie B**

Une entreprise fabrique entre 0 et 1000 objets par semaine.
Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets est modélisé par la fonction f définie sur [0;10] par : $f(x)=(2x-5)e^{-x+4}+20$.
Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la partie A et en arrondissant les résultats à l'unité.

1. Quel est le nombre d'objets à vendre pour réaliser le bénéfice maximum ?
Quel est ce bénéfice maximal en euros ?

2. A partir de combien d'objets fabriqués et vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice positif ?

3. Iinterpréter le résultat de la question 4 de la partie A.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

**CORRECTION**

**Partie A**

**1.** f est dérivable sur [0;10].

$u(x)=2x-5$ $\quad u'(x)=2$

$v(x)=e^{-x+4}$ $\quad v'(x)=-e^{-x+4}$

$f'(x)=2e^{-x+4}+(2x-5)(-e^{-x+4})=(2-2x+5)e^{-x+4}=(-2x+7)e^{-x+4}$

**2.** Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0:10], $e^{-x+4}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $-2x+7$.

$-2x+7=0\Leftrightarrow x=\frac{7}{2}=3,5$

$-2x+7>0\Leftrightarrow x<3,5$

$-2x+7\Leftrightarrow x>3,5$

Tableau de variation

| x | 0 | | 3.5 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | + | 0 | − | |
| f(x) | -252.991 | ↗ | 23.297 | ↘ | 20.037 |

$f(0)=-5e^{4}+20=-272,991+20=-252,991$ à $10^{-3}$ près

$f(10)=15e^{-6}+20=0,037+20=20,037$ à $10^{-3}$ près

$f(3,5)=2e^{-0,5}+20=3,297+20=23,297$ à $10^{-3}$ près

**3.** f est décroissante sur l'intervalle [3,5;10].

Si $3,5\leqslant x\leqslant 10$ alors $f(3,5)\geqslant f(x)\geqslant f(10)=20,037>0$ donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle [3,5;10].

. f est continue et strictement croissante sur l'intervalle [0;3,5], $f(0)=-252,991<0$ et $f(3,5)=23,297>0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution et une seule $\alpha$ appartenant à l'intervalle [0;3,5].

En utilsant la calculatrice on obtient :

$f(1)=-40,257<0$ $\quad f(2)=12,611>0$ $\quad$ donc $1<\alpha<2$

$f(1,5)=-4,365<0$ $\quad f(1,6)=0,158>0$ $\quad$ donc $1,5<\alpha<1,6$

$f(1,59)=-0,264<0$ $\quad f(1,60)=0,158>0$ $\quad$ donc $1,59<\alpha<1,60$

| x | 0 | | $\alpha$ | | 3.5 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | + | 0 | | 0 | − | |
| f(x) | -252.991 | ↗ | 0 | ↗ | 23.297 | ↘ | 20.037 |

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

**4.** La fonction F définie sur [0;10] par : $F(x)=(-2x+3)e^{-x+4}+20x$ est une primitive de f sur l'intervalle [0;10].

La valeur moyenne de f sur [0;10] est $\mu=\frac{1}{10-0}\int_0^{10} f(x)\,dx$.

$\mu=\frac{1}{10}(F(10)-F(0))=\frac{1}{10}(-17e^{-6}+200-3e^{4})=$**3,616** à $10^{-3}$ près.

**Partie B**

**1.** Le maximum de f est obtenu pour x=3,5 (x est le nombre de centaines d'objets).
Il faut donc vendre 350 objets pour réaliser un bénéfice maximal.
$f(3,5)=23,297$ Est la valeur du maximum 'exprimé en milliers d'euros).
Le bénéfice maximal ( dans une semaine) est : 23 297 €

**2.** Le bénéfice est positif si et seulement si f(x) > 0 or $f(\alpha)=0$ et f est croissante sur [0;3,5] donc $\alpha<x\leqslant 3,5$.
On a $1,59<\alpha<1,60$ on obtient $1,60\leqslant x\leqslant 3,5$.
Nous avons vu que f est positive sur [3,5;10].
<u>Conséquence</u>
Le bénéfice est positif si et seulement si $1,6\leqslant x$.
Il faut donc vendre au moins 160 objets pour avoir un bénéfice positif.

**3.** La valeur moyenne de f est le bénéfice moyen (en milliers d'euros) dans la semaine.
Ce bénéfice moyen est : **3 616 €.**

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés