

Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Sur une exploitation agricole, une maladie rend la conservation de fruits difficile. Un organisme de recherche en agronomie teste un traitement sur un champ ; sur une partie du champ, les fruits sont traités, sur l'autre non.

On considère que le nombre de fruits récoltés est extrêmement grand et que la maladie touche les fruits de manière aléatoire.

Partie A : Etude de l'efficacité du traitement

On prélève au hasard 100 fruits sur la partie du champ traité et 100 fruits sur l'autre partie du champ. On constate que :

- sur l'échantillon de 100 fruits traités, 18 sont abimés
- sur l'échantillon des 100 fruits non traités, 32 sont abimés.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion de fruits abimés par la maladie au niveau de confiance de 95 %:

- a. pour la partie de champ traitée
- b. Pour la partie de champ non traitée.

2. Au vu des intervalles obtenus à la question 1, peut-on considérer que le traitement est efficace ?

Partie B : Qualité de production

Une étude plus poussée permet d'estimer la production de fruits abimés à 0,12 dans la partie de champ traitée et à 0,30 dans la partie de champ non traitée. On sait de plus qu'un quart du champ a été traité.

Une fois récoltés, les fruits sont mélangés sans distinguer la partie du champ d'où ils proviennent.

On prélève au hasard un fruit récolté dans le champ et on note :

T l'événement : « Le fruit prélevé provient de la partie traitée »

A l'événement : « Le fruit prélevé est abimé ».

On arrondira les résultats au millième.

1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

2.a. Calculer la probabilité que le fruit prélevé soit traité et abimé.

b. Montrer que $P(A) = 0,255$.

3. Un fruit prélevé au hasard dans la récolte est abimé, peut-on affirmer qu'il y a une chance sur quatre pour qu'il provienne de la partie de champ traitée ?

4. Dans le but d'effectuer un contrôle, cinq fruits sont prélevés au hasard dans le champ. Calculer la probabilité qu'au plus un fruit soit abimé.

CORRECTION

Partie A

1.a. La proportion de fruits abimés par la maladie, pour la partie de champ traitée, obtenue dans l'échantillon de 100 fruits est : $f = \frac{18}{100} = 0,18$.

Donc l'intervalle de confiance au niveau de 95 % est :

$$I = \left[0,18 - \frac{1}{\sqrt{100}}; 0,18 + \frac{1}{\sqrt{100}} \right] = [0,18 - 0,1; 0,18 + 0,1]$$

$$I = [0,08; 0,28]$$

b. La proportion de fruits abimés par la maladie, pour la partie de champ non traitée, obtenue dans l'échantillon de 100 fruits est : $f = \frac{32}{100} = 0,32$.

Donc l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % est :

$$I' = \left[0,32 - \frac{1}{\sqrt{100}}; 0,32 + \frac{1}{\sqrt{100}} \right] = [0,32 - 0,1; 0,32 + 0,1]$$

$$I' = [0,22; 0,42]$$

2. 0,32 n'appartient pas à I (ou 0,18 n'appartient pas à I'). On peut donc conclure que le traitement est efficace au niveau de confiance de 95 %.

Partie B

1. L'énoncé précise :

« On sait qu'un quart du champ est traité »

donc $P(T) = \frac{1}{4} = 0,25$ conséquence $P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,25 = 0,75$

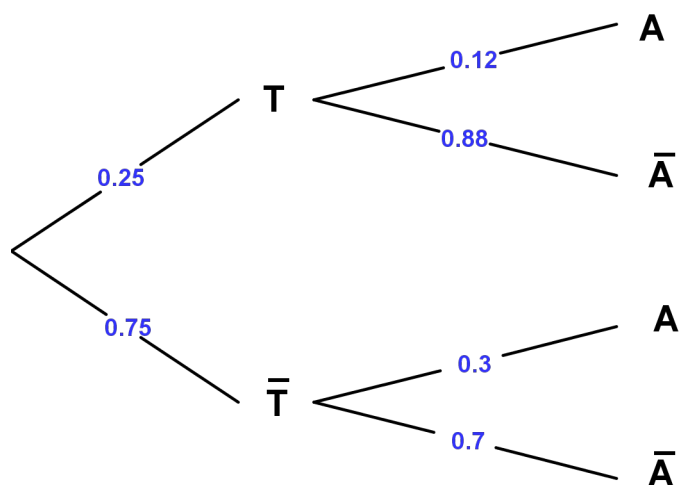
« La proportion de fruits abimés est estimée à 0,12 dans la partie de champ traitée »

donc $P_T(A) = 0,12$ conséquence $P_T(\bar{A}) = 1 - 0,12 = 0,88$.

« La proportion de fruits abimés est estimée à 0,30 dans la partie de champ non traitée »

donc $P_{\bar{T}}(A) = 0,3$ conséquence $P_{\bar{T}}(\bar{A}) = 1 - P_{\bar{T}}(A) = 1 - 0,3 = 0,7$.

On obtient l'arbre pondéré suivant :



2.a. $P(T \cap A) = P(T) \times P_T(A) = 0,25 \times 0,12 = 0,03$

b. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales

$$P(A) = P(A \cap T) + P(A \cap \bar{T}) = P(T) \times P_T(A) + P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(A) = 0,25 \times 0,12 + 0,75 \times 0,3$$

$$P(A) = 0,03 + 0,225 = 0,255$$

3. On a $P_A(T) = \frac{P(A \cap T)}{P(A)} = \frac{0,03}{0,255} = \frac{30}{255} = 0,118$ à 10^{-3} près.

Donc on ne peut pas affirmer qu'il y ait une chance sur quatre pour qu'un fruit abimé provienne de la partie de champ traitée.

4. Le nombre de fruits étant très important, on peut donc supposer que le prélèvement des fruits s'effectue par tirage avec remise.

On considère alors l'épreuve de Bernoulli :

on prélève au hasard un fruit de la production

succès S « le fruit prélevé est abimé »

probabilité de succès $p = P(S) = 0,255$

échec $\bar{S}$ « le fruit prélevé n'est pas abimé »

probabilité de l'échec $q = 1 - p = 1 - 0,255 = 0,745$.

On effectue 5 épreuves (que l'on suppose indépendantes) et la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès en 5 épreuves est la loi binomiale de paramètres 5 et 0,255.

On nous demande de calculer $P(X \leq 1)$

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

on a $P(X=0) = (0,745)^5 = 0,229$ à 10^{-3} près

$$P(X=1) = 5 \times 0,745^4 \times 0,255^1 = 0,393$$
 à 10^{-3} près

$$P(X \leq 1) = 0,229 + 0,393 = 0,622$$
 à 10^{-3} près.