Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignemen de spécialité 5 points

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Un constructeur de planches de surf fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécces-site le passage par 3 postes de travail. Le **tableau 1** indique le nombre d'heures nécessaires par mo-dèle et par poste pour réaliser les planche et le **tableau 2** indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3
Modèle 1	8h	10h	14h
Modèle 2	6h	6h	10h
Modèle 3	12h	10h	18h

Tableau 2	
Poste 1	25€ / h
Poste 2	20€ / h
Poste 3	15€ / h

1. Soit H et C les deux matrices suivantes : $H=\begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$

a. Donner la matrice produit $P=H\times C$

b. Que représentent les coefficients de la matrice $P=H\times C$?

2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :
Modèle 1 : 500€ Modèle 2 : 350€ Modèle 3 : 650€.
Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a, b et c, permettant d'obtenir ces prix de revient.

a. Montrer que les réels a, b et c doivent être solutions du système

$$H\times\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$$

b. Déterminer les réels a, b et c.

Partie B

La façade du magasin dans lequel sont commercialisées les planches est illuminée par un très grand nombre de spots qui sont programmés de la maniére suivante :

. les spots s'allument tous à 22 heures

. Toutes les 10 secondes à partir de 22 heures, et ce de manière aléatoire, 30 % des spots allumés s'éteignent et 50 % de ceux qui sont sont éteints se rallument.

On note : A l'état : « le spot est allumé » et E l'état : « le spot est éteint ».

1.a. Dessiner un graphe probabiliste traduisant la situation.

. Recopier et compléter la matrice de transition (dans l'ordre A,E) associée au graphe

$$M=\begin{pmatrix} \dots & 0{,}3 \\ 0{,}5 & \dots \end{pmatrix}.$$

2. On note n le nombre d'étapes (c'est à dire d'intervalles de temps de 10 secondes) qui s'écoulent à partir de 22 heures et $P_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ état d'un spot à l'étape n, où a_n est la probabilité qu'il soit allumé et b_n la probabilité qu'il soit éteint.

On a alors, pour tout entier naturel n, $P_{n+1}=P_n\times M$.

a. Justifier que $a_0=1$ et $b_0=0$. Ecrire une relation entre P_n et P_0 .

b. Déterminer les coefficients de la matrice P_3 . Quelle est la probabilité que le spot considéré soit éteint à 22 heures et 30 secondes ?

3. Déterminer l'état stable $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ du graphe probabiliste.

CORRECTION

Partie A

1.a. $P=\begin{pmatrix}8 & 10 & 14\\ 6 & 6 & 10\\ 12 & 10 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25\\ 20\\ 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\times 25+10\times 20+14\times 15\\ 6\times 25+6\times 20+10\times 15\\ 12\times 25+10\times 20+18\times 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200+200+201\\ 150+120+150\\ 300+200+270\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}610\\ 420\\ 770\end{pmatrix}$

b. 610 représente le prix de revient, en euros, d'une planche de surf modèle 1.
420 représente le prix de revient, en euros, d'une planche de surf modèle 2.
770 représente le prix de revient, en euros, d'une planche de surf modèle 3.

2. On note a le coût horaire du poste 1, b le coût horaire du poste 2 et c le coût horaire du poste 3.
a. Le prix de revient d'une planche de surf modèle 1 est égal à : $8a+10b+14c$.
On veut obtenir $8a+10b+14c=500$.
Le prix de revient d'une planche de surf modèle 2 est égal à : $6a+6b+10c$.
On veut obtenir $6a+6b+10c=350$.
Le prix de revient d'une planche de surf modèle 3 est égal à : $12a+10b+18c$.
On veut obtenir $12a+10b+18c=650$.

On obtient le système : $\begin{cases}8a+10b+14c=500\\ 6a+6b+10c=350\\ 12a+10b+18c=650\end{cases}$

En utilisant la notation matricielle :

$$\begin{pmatrix}8 & 10 & 14\\ 6 & 6 & 10\\ 12 & 10 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}500\\ 350\\ 650\end{pmatrix}$$

b. En utilisant la calculatrice, on obtient l'inverse de la matrice H.

$H^{-1}=\begin{pmatrix}0,5 & -2,5 & 1\\ 0,75 & -1,5 & 0,25\\ -0,75 & 2,5 & -0,75\end{pmatrix}$ et $H^{-1}\times[H\times\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}]=H^{-1}\times\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$

soit $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=H^{-1}\times\begin{pmatrix}500\\ 350\\ 650\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,5 & -2,5 & 1\\ 0,75 & -1,5 & 0,25\\ -0,75 & 2,5 & -0,75\end{pmatrix}\begin{pmatrix}500\\ 350\\ 650\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,8\times 500-2,5\times 350+1\times 650\\ 0,75\times 500-1,5\times 350+0,25\times 650\\ -0,75\times 500+2,5\times 350-0,75\times 650\end{pmatrix}$$

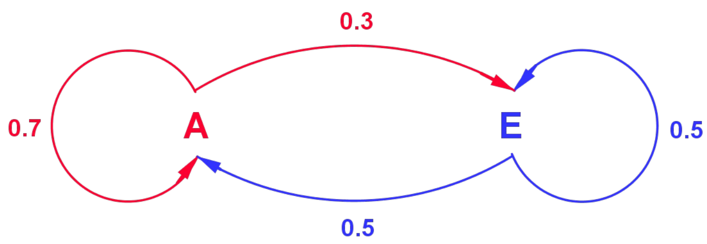
$$\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}250-875+650\\ 378-525+162,5\\ -375+875-487,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\ 12,5\\ 12,5\end{pmatrix}$$

Conclusion :
a = 25 ; b = c = 12,5

Partie B

1.a. « Toutes les 10 seondes, 30 % des spots allumés s'éteignent » donc 70 % des spots allumés restent allumés.
Conséquence
La probabilité qu'un spot à l'état A passe à l'état E est 0,3 et la probabilité qu'un spot à l'état A reste à l'état A est 0,7.
. « Toutes les 10 secondes, 50 % des spots éteints s'allument » donc 50 % des spots éteints restent éteints.
Conséquence
La probabilité qu'un spot à l'état E passe à l'état A est 0,5 et la probabilité qu'un spot à l'état E

reste à l'état E est 0,5.
On obtient le graphe probabiliste suivant :



b. Dans la partie B, on utilise les matrices lignes. L'ordre des états est A puis E.
Pour la matrice de transition, le premier coefficient de la première ligne est la probabilité qu'un spot à l'état A reste à A donc 0,7, le deuxième coefficient de la première ligne est la probabilité qu'un spot à l'état A passe à l'état E donc 0,3 (ce résultat est donné).
Pour la deuxième ligne, le premier coefficient est la probabilité qu'un spot à l'état E passe à l'état A donc 0,5 (ce résultat est donné), le deuxième coefficient est la probabilité qu'un spot à l'état E reste à l'état E soit 0,5.
On a la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

$$M=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$$

2. n est un entier naturel
n est le nombre d'étapes (c'est à dire le nombre d'intervalles de 10 secondes) qui s'écoulent après 22 heures.
$P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ est l'état d'un spot à l'étape n.
a_n est la probabilité que le spot soit allumé à l'étape n.
b_n est la probabilité que le spor soit éteint à l'étape n.
(remarque : $a_n+b_n=1$)
On a $P_{n+1}=P_n\times M$
a. Pour n = 0 , tous les spots sont allumés à 22 heures donc $a_0=1$ et $b_0=0$.
Pour tout entier naturel n
$P_n=P_0\times M^n$
b. En utilisant la calculatrice, on détermine M^3 .

$$M^3=\begin{pmatrix}0{,}628 & 0{,}372\\0{,}62 & 0{,}48\end{pmatrix}$$

$$P_3=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}628 & 0{,}372\\0{,}62 & 0{,}48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}628 & 0{,}372\end{pmatrix}$$

donc $b_3=0{,}372$
0,372 est la probabilité que le spot considéré est éteint à 22 heures et 30 secondes.

3. $P=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ est l'état stable du graphe c'est à dire $\begin{cases}a+b=1\\P\times M=P\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0{,}7\,a+0{,}5\,b & 0{,}3\,a+0{,}5\,b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0{,}7a+0{,}5\,b=a\\0{,}3\,a+0{,}5\,b=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-0{,}3\,a+0{,}5\,b=0\\0{,}3\,a-0{,}5\,b=0\end{cases} \Leftrightarrow \{0{,}3\,a=0{,}5\,b \Leftrightarrow \{b=0{,}6\,a$$

Or $a+b=1$ donc $\{a+0{,}6\,a=1 \Leftrightarrow \{1{,}6\,a=1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{1{,}6}=\frac{10}{16}=0{,}625$

et $b=0{,}6\,a=0{,}6\times 0{,}625=0{,}375$
$P=\begin{pmatrix}0{,}625 & 0{,}375\end{pmatrix}$