Exercice 3 6 points

Les techniciens d'un aquarium souhaitent régler le distributeur automatique d'un produit visant à améliorer la qualité de l'eau dans un bassin. La concentration recommandée du produit, exprimée en mgl^{-1} (milligramme par litre), doit être comprise entre 140 mgl^{-1} et 180 mgl^{-1}.
Au début du test, la concentration du produit dans ce bassin est de 160 mgl^{-1}.
On estime que la concentration baisse' d'environ 10 % par semaine.
Afin de respecter les recommandations portantsur la concentration du produit, les techniciens en- visagent de régler le distributeur automatique de telle sorte qu'il déverse chaque semaine une cer-
taine quantité de produit.
Les techniciens cherchent à déterminer cette quantité de façon à ce que :
. La concentration du produit soit conforme aux recommandations sans intervention de leur part, pendant une durée de 6 semaines au moins ;
. La quantité de produit consommée soit minimale.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 10 mgl^{-1}.
On s'intéresse à l'évolution de la concentration chaque semaine. La situation peut être modélisée par une suite (C_n), en donnant une estimation de la concentration du produit, en mgl^{-1}, au début de la $n^{ième}$ semaine, notée C_n. On a $C_0=160$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1}=0,9\times C_n+10$.

2. Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n=C_n-100$.
a. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et que $V_0=60$.
b. Exprimer V_n en fonction de n.
c. En déduire que pour tout entier naturel n, $C_n=0,9^n\times 60+100$

3.a. Déterminer la limite de la suite (C_n) quand n tend vers l'infini. Justifier la réponse.
Interpréter le résultat au regard de la situation étudiée.
b. Au bout de combien de semaines la concentration devient-elle inférieure à 140 mgl^{-1} ?

4. Le réglage envisagé du distributeur répond-il aux attentes ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 12 mgl^{-1}. Que penser de ce réglage au regard des deux conditions fixées par les techniciens ?

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout entier naturel n.
C_n est l'estimation de la concentration du produit en mgl^{-1} au début de la $n^{ième}$ semaine.
C_{n+1} est l'estimation de la concentration du produit en mgl^{-1} au début de la $(n+1)^{ième}$ semaine.
L'énoncé précise que « la concentration du produit baisse d'environ 10 % par semaine », donc pour la $n^{ième}$ semaine la concentration du produit diminue de $0,1\times C_n$ en mgl^{-1} mais le distributeur automatique ajoute 10 mgl^{-1} et $C_{n+1}=C_n-0,1\times C_n+10=(1-0,9)C_n+10=0,9C_n+10$

2. Pour tout entier naturel n on pose : $V_n=C_n-100$ (donc $C_n=V_n+100$)
a. Pour tout entier naturel n
$V_{n+1}=C_{n+1}-100=0,9C_n+10-100=0,9(V_n+100)-90=0,9V_n+90-90=0,9V_n$
(V_n) est la suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $V_0=C_0-100=160-100=60$.
b. Pour tout entier naturel n :
$V_n=V_0\times q^n=60\times 0,9^n$
c. Pour tout entier naturel n on a $C_n=V_n+100$
donc $C_n=60\times 0,9^n+100$

3.a. $0\leqslant 0,9<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n=100$
Dans un « avenir lointain » la concentration sera voisine de 100 mgl^{-1} .
Mais on ne sait pas si au bout de 6 semaines la concentration sera supérieure à 140 mgl^{-1} .
b. On doit résoudre l'inéquation d'inconnue n (entier naturel) : $0,9^n\times 60+100<140$
$\Leftrightarrow 0,9^n\times 60<40 \Leftrightarrow 0,9^n<\frac{40}{60}<\frac{2}{3}$
La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
$\Leftrightarrow \ln 0,9^n<\ln\frac{2}{3} \Leftrightarrow n\ln 0,9<\ln\frac{2}{3}$
Attention : $0<0,9<1$ donc $\ln 0,9<\ln 1=0$

$$\Leftrightarrow n>\frac{\ln\frac{2}{3}}{\ln 0,9}$$

La calculatrice nous donne: $\frac{\ln\frac{2}{3}}{\ln 0,9}=3,85$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel
Conclusion
Au bout de 4 semaines, la concentration est inférieure à 140 mgl^{-1} .

4. Le réglage envisagé du distributeur automatique ne répond pas aux attentes, car on veut une concentration du produit supérieure ou égale à 140 mgl^{-1} pour 6 semaines au moins.

Partie B

On note C'_n la nouvelle concentration du produit obtenue en mgl^{-1} pour la $n^{ième}$ semaine.
On obtient comme relation de récurrence : $C'_{n+1}=0,9C'_n+12$
et on utilise la calculatrice
$C'_0=160$

$C'_1=156$
$C'_2=152,4$
$C'_3=149,16$
$C'_4=146,24$
$C'_5=143,62$
$C'_6=141,26$
$C'_7=139,13$

Ce réglage permet de satisfaire la première condition : la concentration du produit est conforme pendant 6 semaines.
Pour la deuxième condition on ne peut pas répondre directement.
On peut vérifier que si le distributeur automatique augmente la concentration du produit de $11\ \text{mgl}^{-1}$ alors la première condition n'est pas vérifiée.
Mais peut-on programmer le distributeur automatique au dixième de mgl^{-1} ?
on se propose d'utiliser un tableur pour étudier la situation (cette étude n'est pas demandée dans l'énoncé).
Première colonne : A1 : 0 et A2 : =A1+1
Deuxième colonne : B1 : 160 et B2 : = 0,9xB1+12
Troisième colonne : C1 : 160 et C2 : = 0,9xC1+11,9
Quatrième colonne : D1 : 160 et D2 : = 0,9xD1+11,8
Cinquième colonne : E1 : 160 et E2 : = 0,9xE1+11,7
Puis on étire jusque A8 ; B8 . . .

	A	B	C	D	E
1	0	160	160	160	160
2	1	156	155.9	155.8	155.7
3	2	152.4	152.21	152.02	151.83
4	3	149.16	148.89	148.62	148.35
5	4	146.24	145.9	145.56	145.21
6	5	143.62	143.21	142.8	142.39
7	6	141.26	140.79	140.32	139.85
8	7	139.13	138.61	138.09	137.57

Si le distributeur automatique augmente la concentration de $11,8\ \text{mgl}^{-1}$ par semaine alors la première condition est vérifiée et la quantité de produit consommée est inférieure à celle pour une augmentation de$12\ \text{mgl}^{-1}$ par semaine.