

Exercice 4

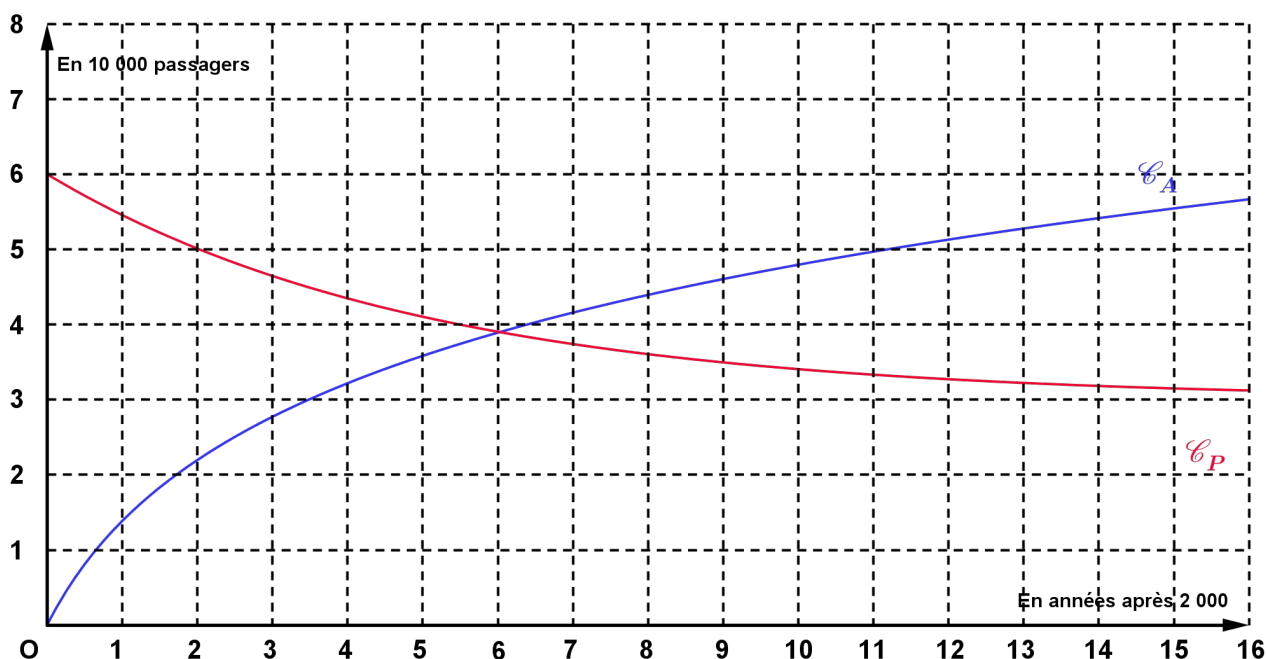
5 points

Une compagnie aérienne propose à partir du premier janvier de l'année 2000 une nouvelle formule d'achat de billets, la formule *Avantage* qui s'ajoute à la formule *Privilège* déjà existante.

Une étude a permis de modéliser l'évolution du nombre de passagers transportés depuis l'année 2000 et la compagnie admet que ce modèle est valable sur la période allant de l'année 2000 à l'année 2016.

Le nombre de passagers choisissant la formule *Privilège* est modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0;16]$ et le nombre de passagers choisissant la formule *Avantage* est modélisé par la fonction A définie sur l'intervalle $[0;16]$. Le graphique donné ci-dessous représente les courbes représentatives $\mathcal{C}_P$ et $\mathcal{C}_A$ de ces deux fonctions.

Lorsque x représente le temps en année à partir de l'année 2000, $P(x)$ représente le nombre de passagers, exprimé en dizaine de milliers, choisissant la formule *Privilège* et $A(x)$ représente le nombre de passagers, exprimé en dizaine de milliers, choisissant la formule *Avantage*.



Partie A

Dans cette partie les estimations seront obtenues par lecture graphique.

- Donner une estimation du nombre de passagers qui, au cours de l'année 2002, avaient choisi la formule *Privilège*.
- Donner une estimation de l'écart auquel la compagnie peut s'attendre en 2015 entre le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* et ceux ayant choisi la formule *Privilège*.
- Comment peut-on interpréter les coordonnées du point d'intersection des deux courbes au regard de la situation proposée ?
- Justifier que la compagnie aérienne peut, selon ce modèle, estimer que le nombre total de passagers ayant choisi la formule *Privilège* durant la période entre 2007 et 2015 sera compris entre 240 000 et 320 000.

Partie B

On admet que la fonction A est définie sur l'intervalle $[0;16]$ par :

$$A(x) = 2 \ln(x+1)$$

et que la fonction P est définie sur l'intervalle $[0;16]$ par :

$$P(x) = 3 + 3e^{-0,2x}.$$

On s'intéresse à la différence en fonction du temps qu'il y a entre le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* et ceux ayant choisi la formule *Privilège*. Pour cela, on considère la fonction E définie sur l'intervalle $[0;16]$ par $E(x) = A(x) - P(x)$.

1. On note E' la fonction dérivée de E sur l'intervalle $[0;16]$.

a. On admet que $E'(x) = \frac{2}{x+1} + 0,6e^{-0,2x}$, justifier que E' est strictement positive sur l'intervalle $[0;16]$.

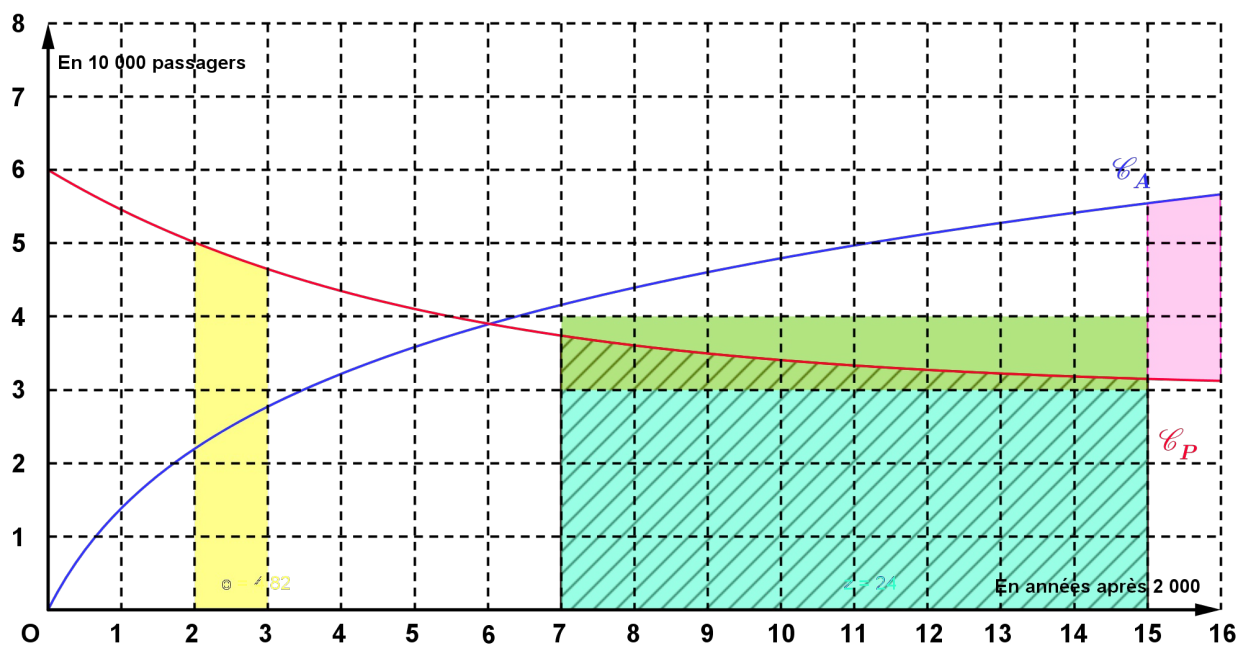
b. Dresser le tableau de variation de la fonction E sur l'intervalle $[0;16]$.

2.a. Montrer que l'équation $E(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $[0;16]$. Donner la valeur de α en arrondissant au dixième.

b. Dresser le tableau de signes de la fonction E sur l'intervalle $[0;16]$. interpréter les résultats obtenus au regard des deux formules proposées par la compagnie aérienne.

CORRECTION

Partie A



1. Le nombre de passagers (en dizaine de milliers) est l'aire en U.A. de la partie de plan comprise entre $\mathcal{C}_P$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=2$ et $x=3$ (en jaune sur le dessin). On estime à 4,8 U.A.

Donc 48 000 passagers ont choisi la formule *Privilège* au cours de l'année 2002.

2. L'année 2015 est représentée par l'intervalle $[15;16[$, l'écart, en dizaine de milliers, du nombre de passagers entre les deux formules est estimé par l'aire en U.A. comprise entre les courbes représentatives de A et P et les droites d'équations : $x=15$ et $x=16$ (en rose sur le dessin). On estime à 2,5 U.A.

Donc 25 000 passagers est l'écart du nombre de passagers entre les formules *Avantage* et *Privilège* pendant l'année 2015.

3. Les coordonnées du point d'intersection des courbes $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_P$ sont $(6;3,9)$.

On peut donc affirmer qu'au premier janvier 2006 les deux formules obtenées le même nombre de passagers : 39 000.

4. Le nombre de passagers (en dizaine de milliers), ayant choisi la formule *Privilège* durant la période 2007 et 2015, est l'aire en U.A. de la partie de plan comprise entre $\mathcal{C}_P$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=7$ et $x=15$ (hachurée sur le dessin).

On peut encadrer cette aire par une partie colorée en bleu de 24 U.A. et une partie colorée en bleu + vert de 32 U.A. sur le dessin.

Conséquence

Le nombre de passagers ayant choisi la formule *Privilège* durant la période 2007 (premier janvier) et 2015 (premier janvier) est compris entre 24 000 et 32 000.

Partie B

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;16]$

$$A(x) = 2 \ln(x+1) \quad P(x) = 3 + 3e^{-0,2x} \quad E(x) = A(x) - P(x)$$

a. On admet que, pour tout nombre réel de l'intervalle $[0;16]$, $E'(x) = \frac{2}{x+1} + 0,6e^{-0,2x}$

Or $e^{-0,2x} > 0$ et pour $0 \leq x \leq 16$ on a $\frac{2}{x+1} > 0$ donc $E'(x) > 0$.

b. $E'(x) > 0$ sur $[0;16]$ donc E est strictement croissante sur $[0;16]$.

$$E(0) = A(0) - P(0) = 0 - 6 = -6$$

$$E(16) = 2 \ln 17 - 3 - 3e^{-3,2} = 2,5441 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	α	16
E'(x)		+	
E(x)	-6	0	E(16)

2.a. E est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0;16]$, $E(0) = -6 < 0$ et $E(16) = 2,5441 > 0$, donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $E(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[0;16]$.

En tenant compte de la partie A, on calcule $E(6)$

$$E(6) = 2 \ln 7 - 3 - 3e^{-1,2} = -0,0118 < 0 \text{ puis on calcule } E(6,1)$$

$$E(6,1) = 0,0345 > 0$$

donc $6 < \alpha < 6,1$

et 6 est une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

b. E est strictement croissante sur $[0;16]$

Si $0 \leq x < \alpha$ alors $E(0) \leq E(x) < E(\alpha) = 0$

Si $\alpha < x \leq 16$ alors $E(\alpha) = 0 < E(x) \leq E(16)$

On donne le signe de E sous forme d'un tableau

x	0	α	16
E(x)	-	0	+

Du premier janvier 2 000 au premier janvier 2 006, il y a plus de passagers ayant choisi la formule *Privilège* que de passagers ayant choisi la formule *Avantage*.

Du premier janvier 2 006 au premier janvier 2 016, il ya plus de passagers ayant choisi la formule *Avantage* que de passagers ayant choisi la formule *Privilège*.