Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans un plan de lutte contre la pollution urbaine, une municipalité a décidé de réduire l'utilisation des automobilistes en ville en instaurant une taxe pour les automobiles circulant dans une zone du centre ville appelée ZTL(Zone à Trafic Limité) et de développer un réseau de navettes.

Partie A

L'objectif affiché par la municipalité est de réduire de moitié la présence des automobiles dans la zone ZTL, dans les deux ans à venir.
Initialement, 40 % des automobiles circulant dans la ville, circulaient dans cette zone ZTL.
Suite à l'instauration de la taxe, l'évolution du trafic dans la ville a été suivie mois après mois.
L'étude a révélé que, parmi les automobiles circulant dans la ville :
. 3 % des automobiles circulant dans la zone ZTL n'y circulaient plus le mois suivant.
. 0,2 % des automobiles qui ne circulaient pas dans la zone ZTL , ont été amenés à y circuler le mois suivant.
On note Z l'état Z l'état : « l'automobile a circulé dans la zone ZTL au cours du mois » et $\bar{Z}$ l'état « l'automobile n'a pas circulé dans la zone ZTL, au cours du mois ».
Pour tout entier n, on note :
. a_n la proportion d'automobiles circulant dans la zone ZTL, au cours du $n^{ième}$ mois
. b_n la proportion d'automobiles ne circulant pas dans la zone ZTL, au cours du $n^{ième}$ mois
. $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste après n mois.
On a : $a_n + b_n = 1$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.

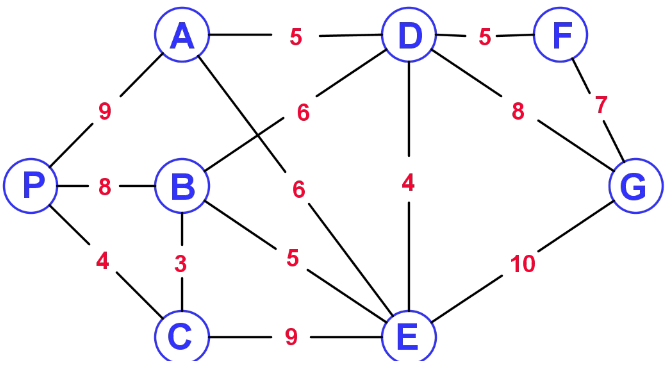
1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets Z et $\bar{Z}$.

2.a. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe (la première colonne conserne Z et la deuxième conserne $\bar{Z}$.
b. Vérifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,3892 & 0,6108 \end{pmatrix}$.

3. L'objectif affiché par la municipalité sera-t-il atteint ?

Partie B

Un réseau de navettes gratuites est mis en place entre les parkings situés aux abords de la ville et les principaux sites de la ville. Le graphe ci-dessous indique les voies et les temps de liaisons, en minu-tes, entre ces différents sites.



1. Peut-on envisager un itinéraire qui relierait le parking P à la gare G en desservant une et une seule fois tous les sites ?

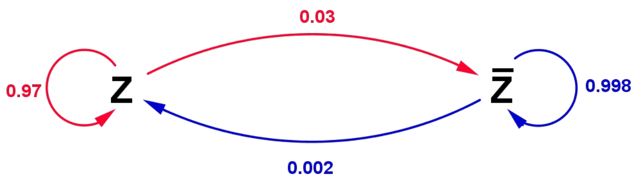
2. Peut-on envisager un itinéraire qui emprunterait une et une seule fois toutes les voies ?

3. Déterminer un trajet de durée minimale pour se rendre du parking P à la gare G.

CORRECTION

Partie A

1. 3 % des automobiles circulant dans la zone ZTL un mois, n'y circulent plus le mois suivant donc 97 % y circulent encore le mois suivant.
. Le poids de l'arête ZZ est la probabilité qu'une automobile circulant dans la zone ZTL un mois, y circule le mois suivant, cette probabilité est : 0,97.
. Le poids de l'arête $Z\bar{Z}$ est la probabilité qu'une automobile circulant dans la zone ZTL un mois, n'y circule plus le mois suivant, cette probabilité est 0,03.
. 0,2 % des automobiles ne circulant pas dans la zone ZTL un mois, y circulent le lois suivant donc 99,8 % n'y circulent pas le mois suivant.
. Le poids de l'arête $\bar{Z}\bar{Z}$ est la probabilité qu'une automobile ne circulant pas dans la zone ZTL un mois, n'y circule pas le mois suivant, cette probabilité est 0,998.
. Le poids de l'arête $\bar{Z}Z$ est la probabilité qu'une automobile ne circulant pas dans la zone ZTL un mois, y circule le mois suivant, cette probabilité est 0,002.
. On obtient le graphe probabiliste suivant :



2.a. L'ordre des sommets est : Z puis $\bar{Z}$.

La matrice de transition est $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

Dans cet exercice on utilise les matrices lignes.

m_{11} est le poids de l'arête ZZ $m_{11}=0{,}97$
m_{12} est le poids de l'arête $Z\bar{Z}$ $m_{12}=0{,}03$
m_{21} est le poids de l'arête $\bar{Z}Z$ $m_{21}=0{,}002$
m_{22} est le poids de l'arête $\bar{Z}\bar{Z}$ $m_{22}=0{,}998$

$$M=\begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}002 & 0{,}998 \end{pmatrix}$$

b. $P_1=P_0\times M$

$$\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}002 & 0{,}998 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}4\times 0{,}97+0{,}6\times 0{,}002 & 0{,}4\times 0{,}03+0{,}6\times 0{,}998 \end{pmatrix}$$

$P_1=\begin{pmatrix} 0{,}3892 & 0{,}6108 \end{pmatrix}$

donc $a_1=0{,}3892$ et 38,92 % des automobiles, circulant dans la ville, circulent dans la zone ZTL le premier mois.

3. On veut calculer a_{24}

or $P_{24}=P_0\times M^{24}$

On utilise la calculatrice pour obtenir M^{24} .

(remarque : On utilise le maximun de décimales pour les calculs mais on ne conserve 4 décimales pour donner le résultat)

$$M^{24}=\begin{pmatrix} 0{,}4920 & 0{,}5080 \\ 0{,}0339 & 0{,}9661 \end{pmatrix}$$

$P_{24}=P_0\times M^{24}=\begin{pmatrix} 0{,}2171 & 0{,}7829 \end{pmatrix}$

$a_{24}=0,2171$ donc 21,71 % des automobiles, circulant dans la ville, circulent dans la zone ZTL le $24^{ème}$ mois, or l'objectif était d'obtenir 20 %.
L'objectif affiché par la municipalité ne sera pas atteint.

Partie B

1. On détermine facilement cet itinéraire :
PCBEADFG

2. On détermine le degré de chaque sommet et on donne les résultats sous la forme d'un tableau

P	A	B	C	D	E	F	G
3	3	4	3	5	5	2	3

Le théorème d'Euler précise que le graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
Ici il y a 6 sommets de degré impair.
Donc il n'existe pas de chaîne eulérienne et on ne peut pas envisager un itinéraire qui emprunterait une et une seule fois toutes les voies.

3. Pour déterminer le trajet de durée minimale on utilise l'algorithme de DIJKSTRA.

P	A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
P(0)	P(9)	P(8)	P(4)	∞	∞	∞	∞
	P(9)	C(7)	P(4)	∞	C(13)	∞	∞
	P(9)	C(7)		B(13)	C(13)	∞	∞
	P(9)			B(13)	C(13)	∞	∞
				B(13)	C(13)	D(18)	D(21)
					C(13)	D(18)	D(21)
						D(18)	D(21)
							D(21)

La durée minimale d'un trajet pour se rendre du parking P à la gare G est 21 minutes.
Ce trajet est **PCBDG**.