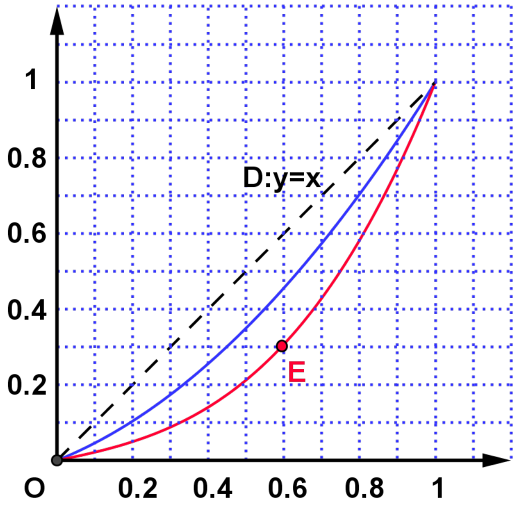
Exercice 3 — 5 points

Etude de la répartition des salaires dans deux entreprises
Un cabinet d'audit a été chargé d'étudier la répartition des salaires dans deux filiales d'une entre-prise appelées A et B. Pour l'étude, les salaires sont classées par ordre croissant.
Le cabinet d'audit a modélisé la répartition de salaires par la fonction u pour la filiale A et par v pour la filiale B.
Les fonctions u et v sont définies sur l'intervalle $[0;1]$ par :
$u(x)=0{,}6x^2+0{,}4x$ et $v(x)=0{,}7x^3+0{,}1x^2+0{,}2x$.
On a tracé ci-après les courbes représentatives $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ des fonctions u et v.



1. Déterminer la courbe représentative de la fonction u en justifiant la réponse.

2. Lorsque x représente un pourcentage des salariés, u(x) et v(x) représentent le pourcentage de la masse salariale que se partagent ces salariés dans leurs filiales respectives.
Exemple : pour la courbe $\mathscr{C}$ ou $\mathscr{C}'$, le point $E(0{,}60;0{,}3072)$ signifie que 60 % des salariés ayant les plus bas salaires se partagent 30,72 % de la masse salariale.
a. Calculer le pourcentage de la masse salariale qui se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires.
b. Pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, laquelle des filiales A ou B distribue la plus grande part de la masse salariale ?
c. Quelle filiale paraît avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire ?

3. Pour mesurer ces inégalités de salaires, on définit le coefficient de Gini associé à une fonction f modélisant la répartition des salaires, rangés en ordre croissant par la formule :

$$c_f=2\left(\frac{1}{2}-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

a. Montrer que $c_u=0{,}2$

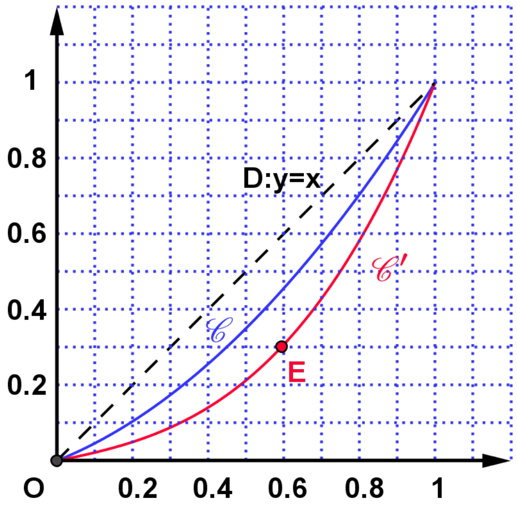
b. En observant que $\frac{c_v}{2}=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x-\int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x$, donner une interprétation graphique de $\frac{c_v}{2}$ en termes d'aires.

c. En déduire que c_v est compris entre 0 et 1.

d. Justifier l'inégalité $c_u \leqslant c_v$

CORRECTION

1. Par lecture graphique :
L'ordonnée du point d'abscisse 0,2 de la courbe tracée en bleu sur le graphique est 0,1 et l'ordonnée du point d'abscisse 0,2 de la courbe tracée en rouge sur le graphique est : 0,05.
Or $u(0,2)=0,6\times 0,4+0,4\times 0,2=0,024+0,08=0,104$
$v(0,2)=0,7\times 0,008+0,1\times 0,04+0,2\times 0,2=0,0056+0,004+0,04=0,0096+0,04=0,0496$
Conclusion
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de u est la courbe tracée en bleu sur le graphique et la courbe représen-tative $\mathscr{C}'$ de v est la courbe tracée en rouge sur le graphique.



2. Le point E appartient à la courbe $\mathscr{C}'$, courbe représentative de v (pour la filiale B).
a. Par lecture graphique :
l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0,5 est 0,35.
Par le calcul :
$u(0,5)=0,6\times 0,25+0,4\times 0,5=0,15\times 0,2=0,35$
donc pour la filiale A : 50 % des salariés ayant les plus bas salaires se partagent 21,25 % de la masse salariale.
b. Par lecture graphique :
l'ordonnée du point de $\mathscr{C}'$ d'abscisse 0,5 est 0,2.
Par le calcul :
$v(0,5)=0,7\times 0,125+0,1\times 0,25+0,2\times 0,5=0,0875+0,025+0,1=0,1125+0,1=0,2125$
donc pour la filiale B : 50 % des salariés ayant les plus bas salaires se partagent 21,25 % de la masse salariale.
Conséquence
La filiale A distribue une plus grande part dela masse salariale, aux salariés ayant les plus bas salaires, que la filiale B.
c. La filiale B paraît avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire.

3.a. $c_u=2\left(\frac{1}{2}-\int_0^1 u(x)\,dx\right)$
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;1]$
$u(x)=0,6x^2+0,4x$
$U(x)=0,6\times\frac{x^3}{2}+0,4\times\frac{x^2}{2}=0,2x^3+0,2x^2$
U est une primitive de u sur [0;1]
et $\int_0^1 u(x)\,dx=U(1)-U(0)=0,2\times 1^3+0,2\times 1^2=0,4$

donc $c_u = 2\left(\frac{1}{2} - 0{,}4\right) = 2(0{,}5 - 0{,}4) = 2 \times 0{,}1 = 0{,}2$

b. $c_v = 2\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 v(x)\,dx\right)$

$\frac{c_v}{2} = \frac{1}{2} - \int_0^1 v(x)\,dx$

On veut vérifier que $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

w(x)=x et $W(x) = \frac{x^2}{2}$

W est une primitive de w sur [0;1]

et $\int_0^1 x\,dx = W(1) - W(0) = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}$

<u>Conclusion</u>

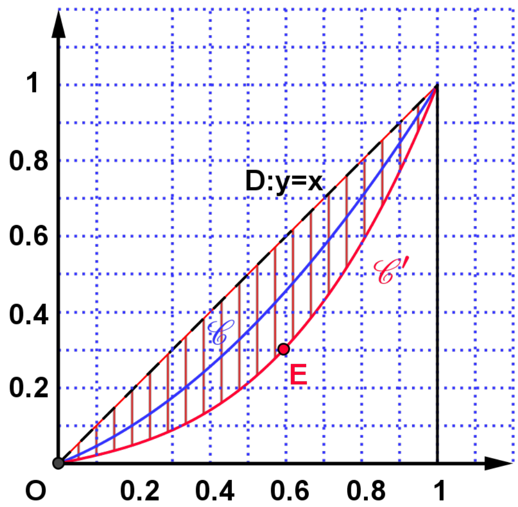
$\frac{c_v}{2} = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 v(x)\,dx$

<u>Interprétation graphique</u>

$\frac{c_v}{2} = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 v(x)\,dx = \int_0^1 (w(x) - v(x))\,dx$

La courbe représentative de w sur l'intervalle [0;1] est un segment de la droite D d'équation : $y = x$.

On remarque que $\mathscr{C}'$ est en dessous de D sur l'intervalle [0;1] donc $\int_0^1 (w(x) - v(x))\,dx$ est l'aire de en U.A. de la partie de plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}'$ et D sur l'intervalle [0;1] (partie hachurée en rouge sur le graphique).



c. La partie hachurée en rouge est contenue dans un triangle isocèle dont les côtés égaux ont pour longueur 1.

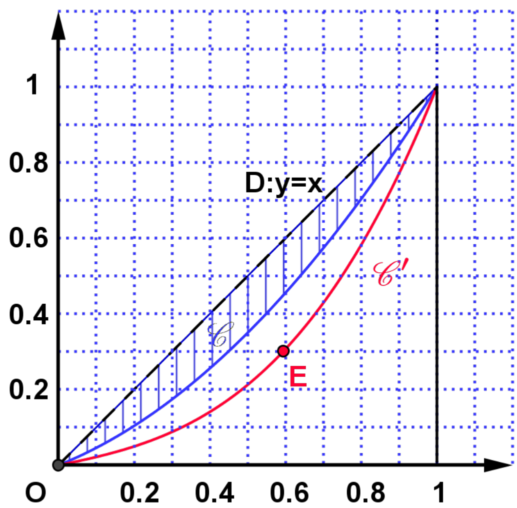
<u>Conséquence</u>

L'aire de la partie hachurée en rouge est inférieure à l'aire du triangle rectangle isocèle : $\frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.

<u>Conclusion</u>

$0 \leqslant \frac{c_v}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ et $0 \leqslant c_v \leqslant 1$.

d. On obtient de même : $\frac{c_u}{2} = \int_0^1 (w(x) - u(x))\,dx$ et $\frac{c_u}{2}$ est l'aire en U.A. de la partie de plan comprise entre $\mathscr{C}$ et D sur l'intervalle [0;1] (partie de plan hachurée en bleu sur le graphique).



Or la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}'$ sur [0;1] donc la partie de plan hachurée en bleu est contenue dans la partie hachurée en rouge donc : $\frac{c_u}{2} \leqslant \frac{c_v}{2} \leqslant \frac{1}{2}$

Conclusion

$c_u \leqslant c_v \leqslant 1$