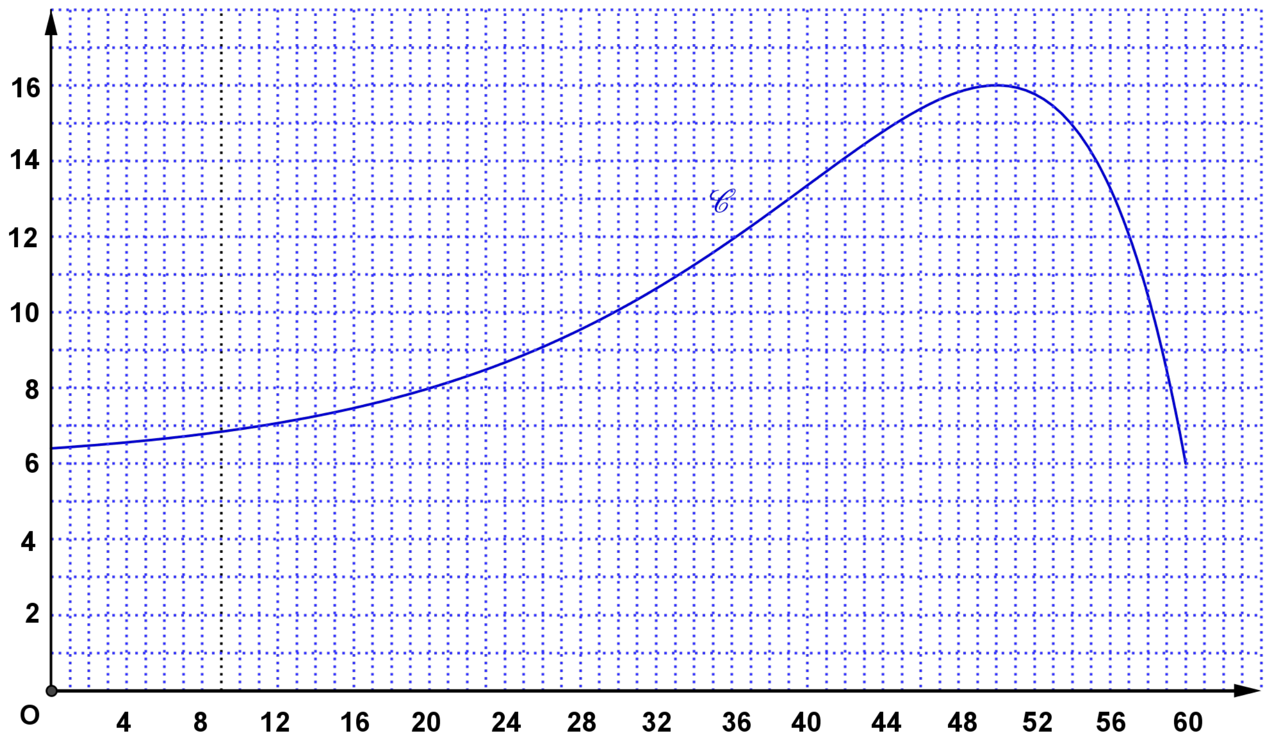
Exercice 4 — 5 points

On considère une fonction P définie et dérivable sur l'intervalle [0;60]
On donne, ci-dessous, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction P.



Partie A
A partir d'une lecture graphique répondre aux questions qui suivent ;

1. En argumentant la réponse, donner le signe de $P'(54)$, où P' est la fonction dérivée de P.

2. Donner un intervalle sur lequel P est convexe.

3. Donner, à l'unité près, les solutions de l'équation $P(x)=0$.

4. On note $\mathscr{A}$ le nombre $\int_0^{10} P(x)\,dx$; choisir l'encadrement qui convient pour $\mathscr{A}$.

$0<\mathscr{A}<10$ $\quad$ $60<\mathscr{A}<70$ $\quad$ $6<\mathscr{A}<7$ $\quad$ $10<\mathscr{A}<11$

Partie B
La fonction P est définie sur l'intervalle [0;60] par : $P(x)=6+(60-x)e^{0,1x-5}$
A l'aide d'un logiciel de calcul formel on a obtenu les résultats suiuvants :

Actions	Résultats
definir(P(x)=6+(60-x)*exp(0.1*x-6-5))	x ⟶ 6+(60-x)*exp(0.1*x-5)
deriver(P(x),x)	(-0.1*x+5)exp(0.1*x-5)
deriver(deriver(P(x),x),x)	(-0.01*x+0.4)*exp(0.1*x-5)

1.a. Etudier le signe de $P'(x)$ sur l'intervalle [0;60], où P' est la fonction dérivée deP.
b. En déduire les variations de la fonction P sur l'intervalle [0;60] et vérifier que la fonction P admet , sur cet intervalle, un maximum valant 16.

2. Montrer que l'équation $\mathrm{P}(x)=10$ aune solution unique x_0 sur l'intervalle [0;60].
Donner une valeur approchée de x_0 à 0,1 près.

3. En exploitant un des résultats donnés par le logiciel de calcul formel, étudier la convexité de la fonction P.

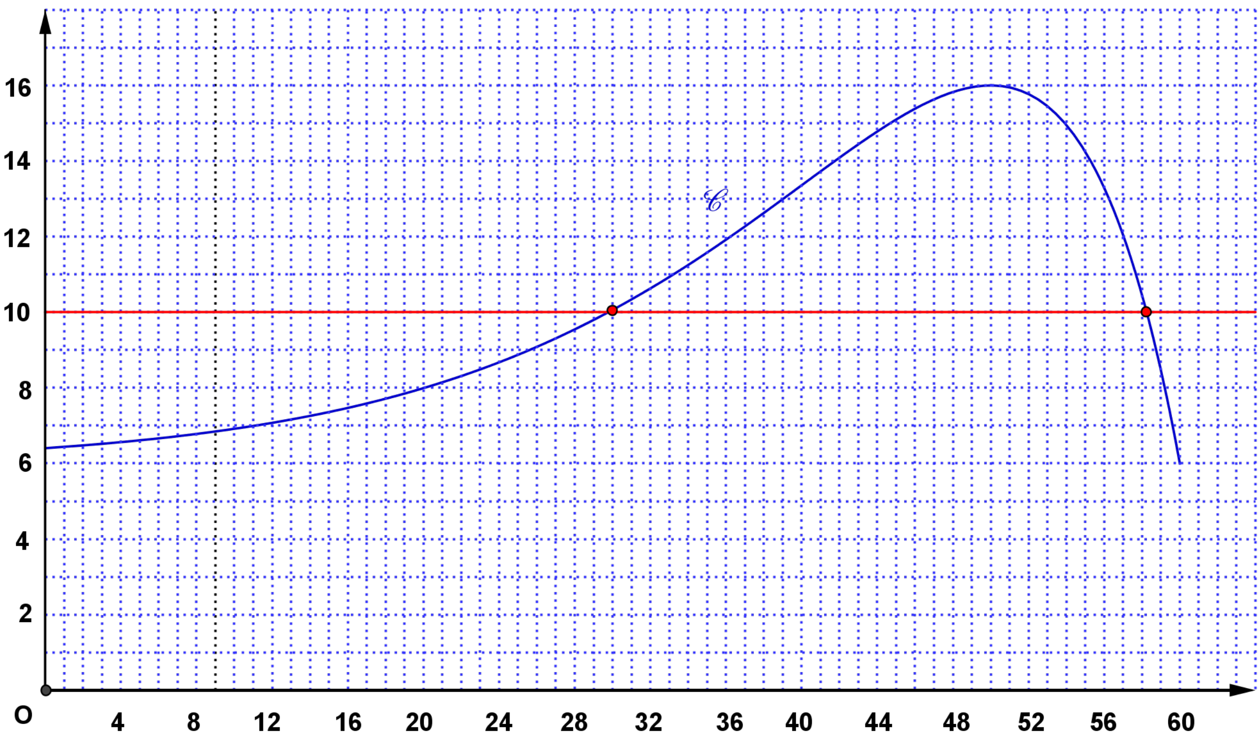
CORRECTION

Partie A

1. La fonction P est décroissante sur l'intervalle [50;60] don c la fonction dérivée de P est négative sur cet intervalle et $P'(54)<0$.

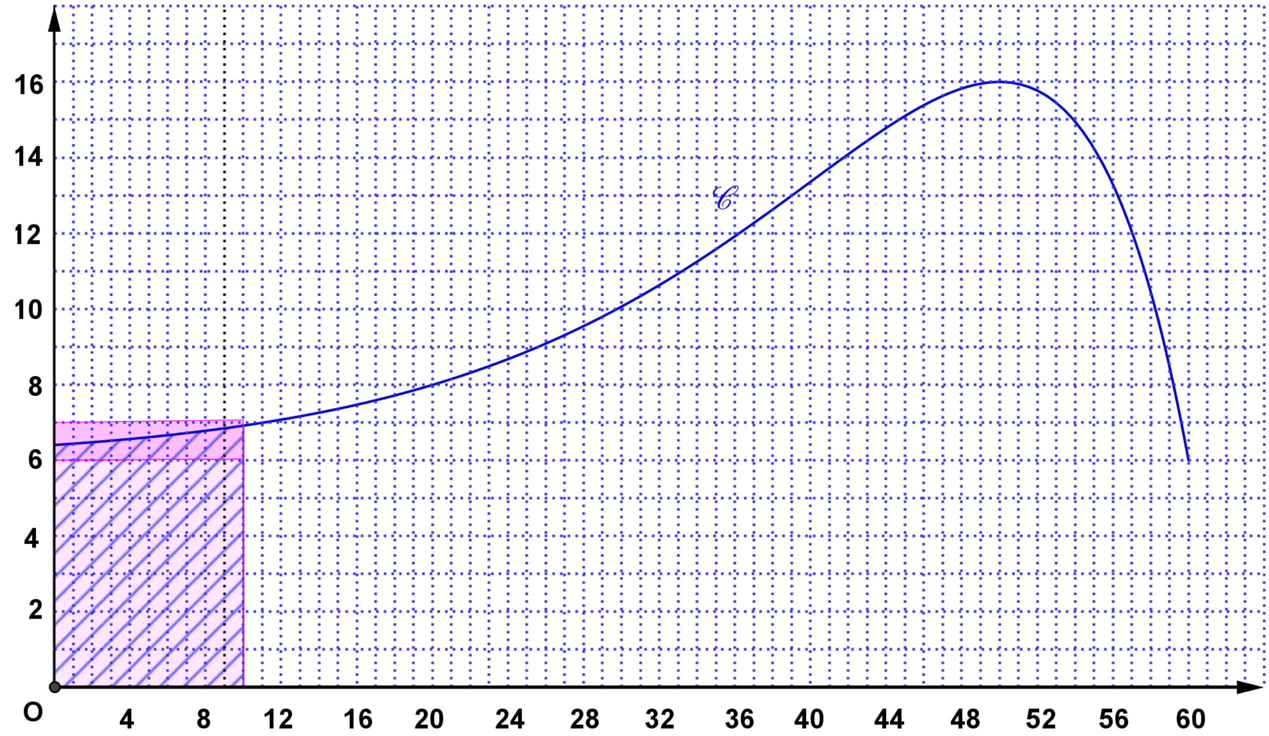
2. On doit déterminer un intervalle sur lequel la courbe est au-dessus de toutes ses tangentes.
Exemple : [0;36] (on peut éventuellement déterminer un intervalle plus grand).

3. Les solutions de l'équation $P(x)=10$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de P et la droite d'équation $y=10$.
Il y a deux points d'intersection d'abscisses : 30 et 58.



L'équation $P(x)=10$ admet 2 solutions 30 et 58 (à l'unité près).

4. P est continue et positive sur [0;10] +donc $\int_0^{10} P(x)\,dx$ est l'aire en U.A. de la partie de plan déterminée par la courbe re présentative de P, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=10$ (partie hachurée sur le graphique suivant).



L'unité d'aire est l'aire d'un petit rectangle déterminé par le quadrillage en bleu.-
Cette partie hachurée de plan contient un rectangle de dimensions 10 et 6 et est contenue dans un rectangle de dimensions 10 et 7 donc on : a $60 < \mathscr{A} < 70$.

Partie B

1.a. En utilisant les résultats du logiciel de calcul formel, on obtient

$P'(x)=(-0,1x+5)e^{0,1x-5}$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;60] on a $e^{0,1x-5}>0$ donc le signe de $P'(x)$ est le signe de (-0,1x+5) sur [0,60]

$$-0,1x+5\geqslant 0 \Leftrightarrow 5\geqslant 0,1x \Leftrightarrow \frac{5}{0,1}\geqslant x \Leftrightarrow 50\geqslant x$$

donc $P'(x)$ est positive sur [0;50[et négative sur]50;60].

b. P est donc croissante sur [0;50] et décroissante sur [50;60].

$P(0)=6,20$ à 10^{-2} près

$P(50)=6+(60-50)e^{0}=16$ $P(60)=6$

<u>Tableau de variations de P</u>

x	0		50		60
P'(x)		+	0	−	
P(x)	P(0)	↗	16	↘	6

donc P admet 16 pour maximum pour la valeur $x=50$.

2. P est continue et strictement croissante sur l'intervalle [0;40].

$P(0)=6,2<10$ et $P(40)=6++e^{-1}=13,36$ à 10^{-2} près $P(40)>10$.

Le théorème des valeurs intermédiaires, nos permet d'affirmer que l'équation $P(x)=10$ admet une solution unique x_0 appartenant à l'intervalle [0;40].
En utilisant la calculatrice, on obtient :

$P(30)=10{,}06$ à 10^{-2} près $\quad P(30)>10$

$P(29{,}9)=10{,}03$ à 10^{-2} près $\quad P(29{,}9)>10$

$P(29{,}8)=10{,}01$ à 10^{-2} près $\quad P(29{,}8)>10$

$P(29{,}7)=9{,}98$ à 10^{-2} près $\quad P(29{,}7)<10$

$P(x_0)=10$ et P est croissante sur [0;50] donc $29{,}7<x_0<29{,}8$

$x_0=29{,}8$ à 10^{-2} près.

3. Les résultats du logiciel de calcul formel nous donne :

$P''(x)=(-0{,}01x+0{,}4)e^{0{,}1x-5}$

or $e^{0{,}1x-5}>0$ donc le signe de $P''(x)$ sur [0;60] est le signe de (-0,01x+0,4)

$-0{,}01x+0{,}4\leqslant 0 \Leftrightarrow 0{,}4\leqslant 0{,}01x \Leftrightarrow \dfrac{0{,}4}{0{,}01}\geqslant x \Leftrightarrow 40\geqslant x$

on donne le signe de $P''(x)$ sous la forme d'un tableau

x	0		40		60
P''(x)		+	0	–	

donc P est convexe sur [0;40] et concave sur [40;60] et le point de coordonnées $(40;P(40))$ est un point d'inflexion de la courbe.