

## Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonnies d'abeilles qu'il installe dans cette région.

Après renseignements près auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonnies chaque printemps.

1. On considère l'algorithme suivant :

**Variables :**  $n$  est un nombre entier naturel  
 $C$  est un nombre réel

**Traitement :** Affecter à  $C$  la valeur 300  
Affecter à  $n$  la valeur 0  
Tant que  $C < 400$  faire  
 $C$  prend la valeur  $C - C \times 0,08 + 50$   
 $n$  prend la valeur  $n + 1$   
Fin Tant que

**Sortie :** Afficher

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.

Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Test $C < 400$		Vrai		...
Valeur de $C$	300	326		...
Valeur de $n$	0	1		...

b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonnies par la suite  $(C_n)$  de terme  $C_n$  donnant une estimation du nombre de colonnies pendant l'année  $2014 + n$ .

Ainsi  $C_0 = 300$  et le nombre de colonnies en 2014.

a. Exprimer pour tout entier  $n$  le terme  $C_{n+1}$  en fonction  $C_n$ .

b. On considère la suite  $(V_n)$  définie pour tout entier  $n$  par  $V_n = 625 - C_n$ .

Montrer que pour tout nombre entier naturel  $n$  on a  $V_{n+1} = 0,92 \times V_n$ .

c. En déduire que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$ .

d. Combien de colonnies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024 ?

3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonnies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.

a. Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question ?

b. Donner une réponse à cette question de l'apiculteur.

## CORRECTION

1.a. En utilisant la calculatrice, on obtient :

test $C < 400$		Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
Valeur de C	300	326	349	372	392	411	
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	

b. La valeur affichée, à la fin, de l'exécution de l'algorithme est : **5**

Interprétation :

L'année  $2014+5=2019$  est la première année pour laquelle le nombre de colonnines d'abeilles est supérieur à 400.

2.a.  $C_0 = 300$

Pour tout entier naturel  $n$  :

$$C_{n+1} = C_n - 0,08C_n + 50 = 0,92C_n + 50$$

b. Pour tout entier naturel  $n$  :

$$V_n = 625 - C_n \quad (\text{donc } C_n = 625 - V_n)$$

$$V_{n+1} = 625 - C_{n+1} = 625 - (0,92C_n + 50) = 575 - 0,92 \times (625 - V_n) = 575 - 0,92 \times 625 + 0,92V_n = 0,92V_n$$

c.  $(V_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $V_0 = 625 - C_0 = 625 - 300 = 325$  et de raison  $q = 0,92$ .

Pour tout entier naturel  $n$

$$V_n = V_0 \times q^n = 325 \times 0,92^n \quad \text{et} \quad C_n = 625 - V_n$$

$$\text{donc } C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$$

d.  $2024 = 2014 + 10$  donc  $n = 10$

$$C_{10} = 625 - 325 \times 0,92^{10}$$

$$C_{10} = 625 - 141 = 484 \quad (\text{à l'unité près})$$

2. L'apiculteur espère doubler son nombre, de colonnies, initial c'est à dire il désire :  $600 \leq C_n$ .

a. Il suffit dans l'algorithme de remplacer l'instruction  $C < 400$  par l'instruction  $C < 600$ .

b. On veut donner une réponse à l'apiculteur.

Première méthode

On utilise la calculatrice pour réaliser l'algorithme.

Ici nous utilisons un tableur pour répondre.

En A1 : 0                      en B1 : 300

En A2 : =A1 + 1            en B2 : =0,92B1 + 50

Puis on étire.

On obtient

En A31 : 30                    en B31 : 598,36...

En A32 : 31                    en B32 : 600,49...

	A	B
1	0	300
2	1	326
3	2	349.92
4	3	371.93
5	4	392.17
6	5	410.80
7	6	427.93
8	7	443.70
9	8	458.20
10	9	471.55
11	10	483.82
12	11	495.12
13	12	505.51
14	13	515.07
15	14	523.86
16	15	531.95
17	16	539.40
18	17	546.25
19	18	552.55
20	19	558.34
21	20	563.67
22	21	568.58
23	22	573.09
24	23	577.25
25	24	581.07
26	25	584.58
27	26	587.82
28	27	590.79
29	28	593.53
30	29	596.04
31	30	598.36
32	31	600.49

donc en  $2014+31=2045$  le nombre de colonnies sera doublé.

### Deuxième méthode

En utilisant les propriétés de la fonction logarithme népérien.

$$600 \leq C_n \Leftrightarrow 600 \leq 625 - 325 \times 0,92^n \Leftrightarrow 325 \times 0,92^n \leq 625 - 600$$

$$\Leftrightarrow 0,92^n \leq \frac{625-600}{325} = \frac{25}{325} = \frac{1}{13}$$

**ln est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .**

$$\Leftrightarrow \ln(0,92^n) \leq \ln\left(\frac{1}{13}\right) \Leftrightarrow n \ln(0,92) \leq -\ln(13)$$

**Attention :**  $0 < 0,92 < 1$  donc  $\ln(0,92) < 0$

$$\Leftrightarrow n \geq -\frac{\ln(13)}{\ln(0,92)}$$

En utilisant la calculatrice on obtient :  $-\frac{\ln(13)}{\ln(0,92)} = 30,5 \dots$

or  $n$  est un entier naturel donc  $n \geq 31$

et en  $2014+31=2045$  le nombre de colonnies sera doublé.