

Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

. Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.

. Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.

. Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec.

L'unité de temps est la minute, et à un instant $t=0$, le nombre de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 100, 0 et 0.

On représente la distribution des internautes sur les trois sites- après t minutes par une matrice N_t ; ainsi $N_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On suppose qu'il n'y a ni déconnection pendant l'heure (de $t=0$ à $t=60$) ni nouveaux internautes visiteurs.

1. Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.

2. Ecrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).

3. On donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{20} = \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix}$$

Calculer N_2 . Interpréter le résultat obtenu.

4. Calculer $N_0 \times M^{20}$. Conjecturer la valeur de l'état stable et interpréter la réponse.

5. Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera.

Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation.

A l'instant $t=0$, le site C est donc infecté.

a. Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t=1$ le site A soit infecté.

b. Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t=2$ les trois sites soient infectés ?

CORRECTION

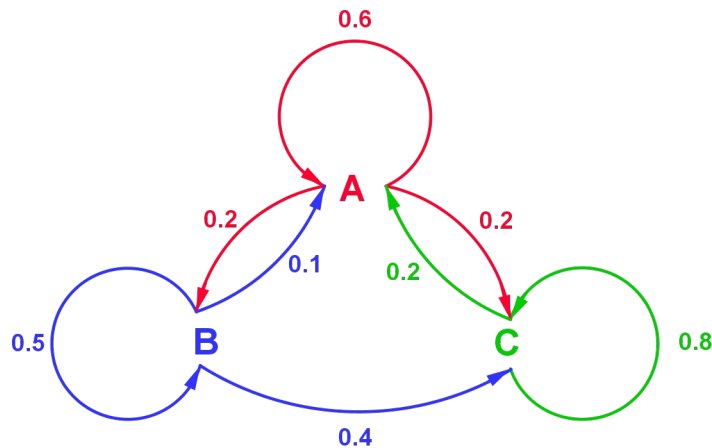
1. L'énoncé précise :

$$P_A(B)=0,2 ; P_A(C)=0,2 \text{ donc } P_A(A)=1-0,2-0,2=0,6$$

$$P_B(A)=0,1 ; P_B(C)=0,4 \text{ donc } P_B(B)=1-0,1-0,4=0,5$$

$$P_C(A)=0,2 ; P_C(B)=0 \text{ donc } P_C(C)=1-0,2=0,8$$

On obtient l'arbre probabiliste suivant :



2. L'ordre des sommets est : A, B et C.

M est la matrice de transition associé au graphe.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

m_{11} est le poids de l'arête AA : 0,6

m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,2

m_{13} est le poids de l'arête AC : 0,2

m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,1

m_{22} est le poids de l'arête BB : 0,5

m_{23} est le poids de l'arête BC : 0,4

m_{31} est le poids de l'arête CA : 0,2

m_{32} est le poids de l'arête CB : 0

m_{33} est le poids de l'arête CC : 0,8

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

3. Pour tout entier naturel n, on a : $N_n = N_0 \times M^n$ donc $N_2 = N_0 \times M^2$

$$\text{Or } N_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix}$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 22 & 36 \end{pmatrix}$$

Interprétation

Pour $t=2$ (au bout de 2 minutes), il y a 42 internautes sur le site A, 22 sur le site B et 36 sur le site C.

$$4. N_0 \times M^{20} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31,25 & 12,5 & 56,25 \end{pmatrix}.$$

On remarque que si on avait au départ 100 internautes en B alors $N'_0 = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}$ et

$N'_0 \times M^{20} = N_0 \times M^{20}$, de même si les 100 internautes étaient en C $N''_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$

et $N''_0 \times M^{20} = N_0 \times M^{20}$.

On peut vérifier pour toutes autres répartitions de 100 internautes sur les sites A, B et C on obtient le même résultat.

On peut donc conjecturer que l'état stable (en pourcentage) est $\begin{pmatrix} 31,25 & 12,5 & 56,25 \end{pmatrix}$

Interprétation

Pour $t \geq 20$ (au bout de 20 minutes), il y a 31,25 % des internautes sur le site A, 12,5 % sur le site B et 56,25 % sur le site C.

5.a. Pour $t=1$, le site A est infecté si et seulement si l'internaute parti de C se rend en A et la probabilité de ce lien est : 0,2.

b. Pour $t=2$, les trois sites sont infectés si et seulement si l'internaute parti de C se rend en A puis en B.

La probabilité de la chaîne CAB est : $0,2 \times 0,2 = \underline{0,4}$.