Exercice 3 4 points

On s'interesse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-2(x+2)e^{-x}$

Partie A

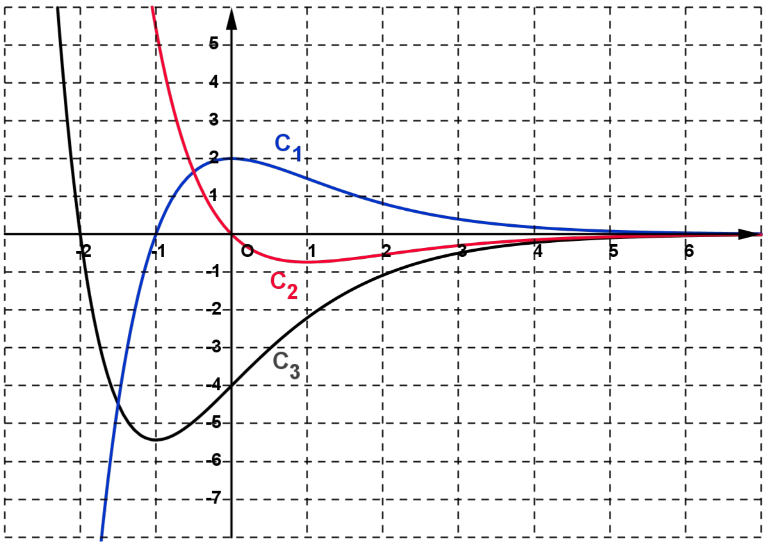
1. Calculer $f(-1)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

2. Justifier que $f'(x)=2(x+1)e^{-x}$ où f' est la fonction dérivée de f.

3. Endéduire les variations de la fonction f.

Partie B

Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes C_1, C_2 et C_3 ont été représentées.
L'une de ces courbes représente la fonction f, une autre repr »sente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.
Expliquer comment ces représentations graphiques de déterminer la convexité de la fonction f.
Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.



CORRECTION

Partie A

Pour tout nombre réel x, $f(x)=-2(x+2)e^{-x}$

1. $f(-1)=-2(-1+2)e^{1}=-2e=-5{,}44$ **à** 10^{-2} près.

2. Rappel :

$(e^{u})'=u'\times e^{u}$ donc $(e^{-x})'=-e^{-x}$ (avec $u(x)=-x$).

On dérive un produit :

$f'(x)=-2e^{-x}-2(x+2)(-e-x)=-2e^{-x}+2xe^{-x}+4e^{-x}=2(x+1)e^{-x}$

3. Pour tout nombre réel x, on a : $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de 2(x+1).

$2(x+1)=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

$2(x+1)>0\Leftrightarrow x+1>0\Leftrightarrow x>-1$

$2(x+1)<0\Leftrightarrow x+1<0\Leftrightarrow x<-1$

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau

x	-∞		-1		+∞
f '(x)		-	0	+	
f'x)		↘	-2e	↗	

Partie B

C_3 est la courbe représentative de f car on a $f(-2)=0$ et $f(-1)=-2e$.

C_1 est la courbe représentative de f' car $f'(-1)=0$.

Conséquence :

C_2 est la courbe représentative de f''.

On détermine graphiquement le signe de f''.

Sur $]-\infty;0]$ la courbe C_2 est au dessus de l'axe des abscisses donc $f''(x)\geqslant 0$.

Sur $[0;+\infty[$ la courbe C_2 est en dessous de l'axe des abscisses donc $f''(x)\leqslant 0$.

Conclusion :

f est convexe sur $]-\infty;0]$.