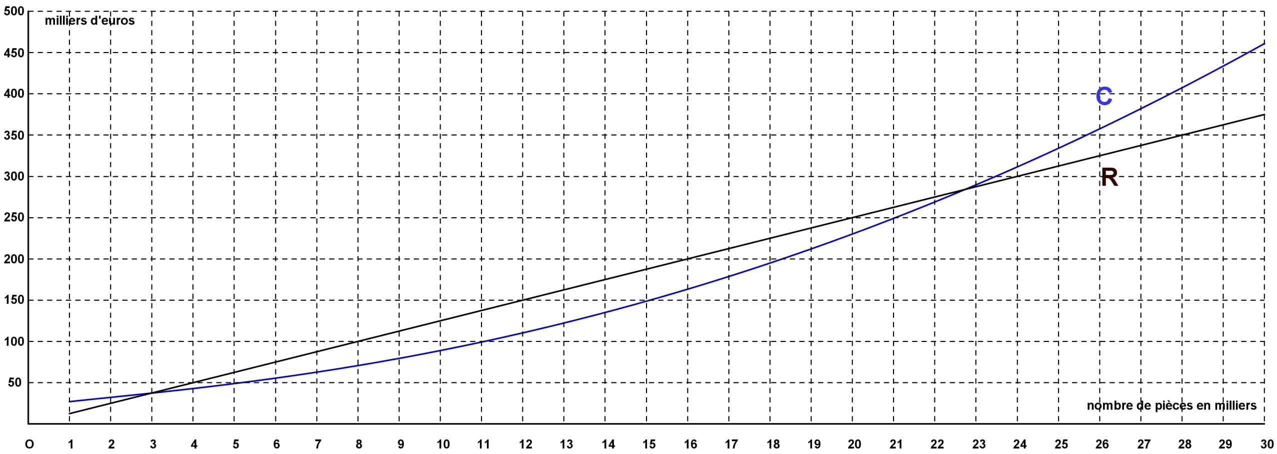
Exercice 4 6 points

Une entreprise produit et vend des composants électroniques.
Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 1 000 et 30 000 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée.
Les parties A et B peuvent être traitéees de façon indépendante.

Partie A

On donne ci-dessous R et C les représentations graphiques respectives des fonctions recette et coût sur l'intervalle $[1;30]$.



Par lecture graphique, donner une estimation des valeurs demandées.

1. Quel est le coût de production de 21 000 pièces ?

2. Pour quelles quantités de pièces produites l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

3. Pour quelnombre de pièces produites le bénéfice est-il maximal ?

Partie B

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle $[1;30]$ par : $B(x)=-0{,}5x^2+6x-20+2x\ln x$.

1. Montrer que $B'(x)=-x+8+2\ln x$, où B' est la fonction dérivée de B sur l'intervalle $[1;30]$.

2. On admet que $B''(x)=-1+\dfrac{2}{x}$ où B'' est la dérivée seconde de B sur l'intervalle $[1;30]$.

Justifier le tableau de variation de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1;30]$.

x	1	2	30
B'(x)	7 ↗	6+2ln2	↘ -22+2ln30

3.a. Montrer que l'équation $B'(x)=0$ admet une unique solution α sur lintervalle $[1;30]$.

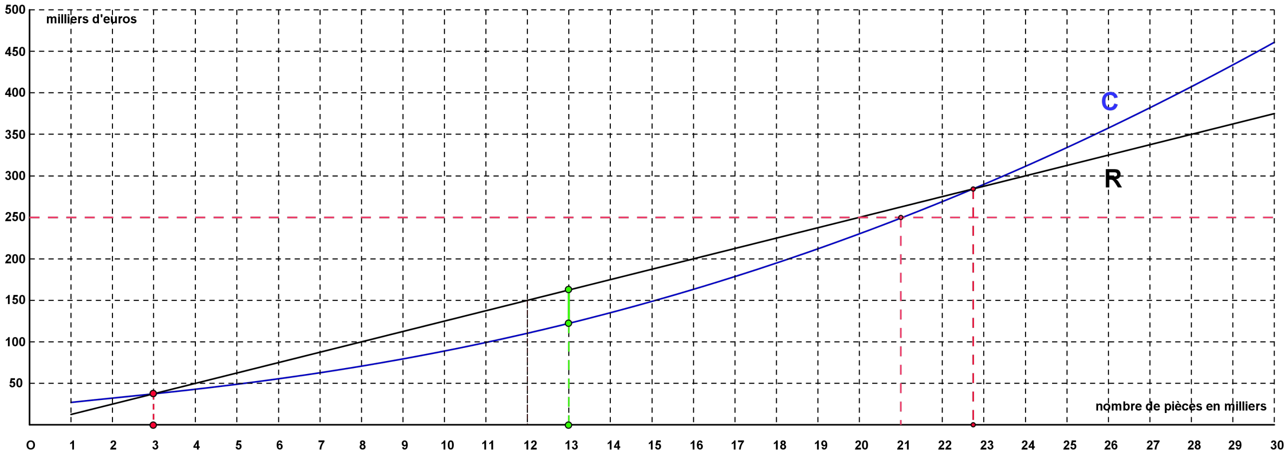
b. Donner une valeur approchée au millième de la valeur α.

4. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1;30]$, et donner le tableau de variation de la fonction bénéfice B sur cet intervalle.

5. Quel est le nombre de pièces à produire, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal ?
Quel est ce bénéfice maximal (arrondi au millier d'euros).

CORRECTION

Partie A



1. On regarde l'ordonnée du point d'abscisse 21 de la courbe C, on obtient 250 c'est à dire le coût de la production de 21 000pièces est 250 000€.

2. La courbe C est en dessous de R sur l'intervalle $[3;22,8]$, il faut donc produire entre 3 000 et 22 800 pièces pour réaliser un bénéfice.

3. On peut dire que le bénéfice maximal est obtenu pour la fabrication de 13 000 pièces. (Mais graphiquement il est difficile de comparer les valeurs du bénéfice pour 12 000, 13 000 ou 14 000 pièces).

Partie B

Pour tout nombre réel x : $B(x)=-0,5x^2+6x-20+2x\ln x$

1. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ et $(x\ln x)'=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

$B'(x)=-0,5(2x)+6+2\ln x+2=-x+8+2\ln x$.

2. $B''(x)=-1+\frac{2}{x}=\frac{-x+2}{x}$

Le signe de $B''(x)$ est le signe de (-x+2) sur $[1;30]$.
Si $0\leqslant x\leqslant 2$ alors $0\leqslant B''(x)$
Si $2\leqslant x\leqslant 30$ alors $0\geqslant B''(x)$.
Donc B' est croissante sur $[1;2]$ et B' est décroissante sur $[2;30]$.
De plus $B'(1)=7$ et $B'(2)=6+2\ln 2$ et $B'(30)=-22+2\ln 30$.
Ces résultats justifient le tableau de variation donné.

3.a. Si $1\leqslant x\leqslant 2$ alors $B'(1)=7\leqslant B'(x)$.
Donc l'équation : $B'(x)=0$ n'admet de solution sur $[1;2]$.
B' est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[2;30]$ et $B'(2)>0$ et $B'(30)<0$
donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe α unique appartenant à $[2;30]$ tel que $B'(\alpha)=0$.
b. On utilise la calculatrice.
On commence à calculer $B'(13)$ car par lecture graphique, on a dit que bB était maximal pour $x=13$
$B'(13)=0,13$ à 10^{-2} près donc $B'(13)>0=B'(\alpha)$ et $13<\alpha$

$B'(14)=-0,72$ à 10^{-2} près donc $B'(14)<0=B'(\alpha)$ et $\alpha<14$
On obtient l'encadrement : $13<\alpha<14$.
$B'(13,1)>0$ donc $13,1<\alpha<14$
$B'(13,2)<0$ donc $13,1<\alpha<13,2$
$B'(13,15)>0$ donc $13,15<\alpha<13,2$
$B'(13,16)<0$ donc $13,15<\alpha<13,16$
$B'(13,153)>0$ donc $13,153<\alpha<13,16$
$B'(13,154)<0$ donc $13,153<\alpha<13,154$
$\alpha=13,153$ à 10^{-3} près

4. Si $1\leqslant x\leqslant 2$ alors $B'(1)=7\leqslant B'(x)$
car B' est strictement croissante sur $[1;2]$.
Si $2\leqslant x<\alpha$ alors $B'(x)>B'(\alpha)=0$
car B' est strictement décroissante sur $[2;30]$
Si $\alpha<x=30$ alors $B'(\alpha)=0>B'(x)$
On donne le tableau de variation de B

x	1		α		30
B'(x)		+	0	-	
B(x)			B(α)		
	B(1)	↗		↘	B(30)

$B(1)=-0,5+6-20=-14,5<0$ $B(30)=-450+180-20+60\ln 30=-290+60\ln 30$
$B(30)=-85,928$ à 10^{-3} près $B(30)<0$
<u>Remarque</u>
$B'(\alpha)=0=-\alpha+8+2\ln(\alpha)$ donc $\ln(\alpha)=\dfrac{\alpha-8}{2}$
$B(\alpha)=-0,5\alpha^2+6\alpha-20+2\alpha\ln(\alpha)=-0,5\alpha^2+6\alpha-20+\alpha(\alpha-8)$
$B(\alpha)=0,5\alpha^2-2\alpha-20$
(Une valeur approchée de $B(\alpha)$ est demandée dans la question suivante).

5. $\alpha=13,153$ **à** 10^{-3} près
Il faut donc produire 13153 pièces pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal.
Le bénéfice en milliers d'euros est : $B(\alpha)$, avec la calculatrice, on obtient 40 milliers d'euros (à un millier près).