

Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Une société propose un service d'abonnement pour jeux vidéos sur téléphone mobile.

Le 1^{er} janvier 2016, on compte 4000 abonnés.

A partir de cette date, les dirigeants de la société ont constaté que d'un mois sur l'autre, 8 % des anciens joueurs se désabonnent mais que par ailleurs, 8000 nouvelles personnes s'abonnent.

1. Calculer le nombre d'abonnés à la date à la date du 1^{er} février 2016.

Pour la suite de l'exercice, on modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre de milliers d'abonnés au bout de n mois après le 1^{er} janvier 2016.

La suite (u_n) est donc définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 0,92u_n + 8$$

2. On considère l'algorithme suivant :

```

Variable :          N est un nombre entier naturel
                       U est un nombre réel
Taitement :       U prend la valeur 4
                       N prend la valeur 0
                       Tant que U < 40
                           U prend la valeur 0,92U + 8
                           N prend la valeur N + 1
                       Fin Tant que
Sottie :          Afficher N
    
```

2.a. Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les valeurs de U seront arrondies au dixième.

Valeur de U	4	
Valeur de N	0	
Condtion U < 40	Vraie	

2.b. Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 100$.

3.a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,92 et de premier terme v_0 .

3.b. Donner l'expression de v_n en fonction de n .

3.c. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 100 - 96 \times 0,92^n$.

4. En résolvant une inéquation, déterminer la date(année et mois) à partir de laquelle le nombre d'abonnés devient supérieur à 70 000.

CORRECTION

1. Au 1^{er} février 2016.

8 % des abonnés au 1^{er} janvier 2016 se désabonnent soit $4000 \times \frac{8}{100} = 320$ et 8000 nouvelles personnes s'abonnent donc le nombre d'abonnés au 1^{er} février 2016 est : $4000 - 320 + 8000 = 11\ 680$.

- 2.a. $u_1 = 4 \times 0,92 + 8 = 11,68 < 40$ on arrondit au dixième 11,7.
 $u_2 = u_1 \times 0,92 + 8 = 18,7456 < 40$ on arrondit au dixième 18,7
 $u_3 = u_2 \times 0,92 + 8 = 25,245952 < 40$ on arrondit au dixième 25,2
 $u_4 = u_3 \times 0,92 + 8 = 31,22627584 < 40$ on arrondit au dixième 31,2
 $u_5 = u_4 \times 0,92 + 8 = 36,72817377 < 40$ on arrondit au dixième 36,7
 $u_6 = u_5 \times 0,92 + 8 = 41,78991987 < 40$ on arrondit au dixième 41,8

On donne les résultats sous la forme d'un tableau

Valeur de U	4	11.7	18.7	25.2	31.2	36.7	41.8
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6
Condition U < 40	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Fausse

2.b. Le nombre d'abonnés au 1^{er} juillet 2016 est, pour le premier mois, supérieur à 40 000.

3. Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 100$ (donc $u_n = v_n + 100$) et $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 0,92u_n + 8$.

3.a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 100 = (0,92u_n + 8) - 100 = 0,92(v_n + 100) - 92 = 0,92v_n + 92 - 92 = 0,92v_n$$

(v_n) est la suite géométrique de raison 0,92 et de premier terme $v_0 = u_0 - 100 = 4 - 100 = -96$.

3.b. Pour tout entier naturel n

$$v_n = 0,92^n \times v_0 = -96 \times 0,92^n$$

3.c. Pour tout entier naturel n

$$u_n = v_n + 100 = 100 - 96 \times 0,92^n$$

4. 70 000 = 70 milliers d'abonnés

$$u_n > 70 \Leftrightarrow 100 - 96 \times 0,92^n > 70 \Leftrightarrow 30 > 96 \times 0,92^n \Leftrightarrow \frac{30}{96} > 0,92^n$$

ln est croissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{30}{96}\right) > \ln(0,92^n) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{30}{96}\right) > n \times \ln(0,92) \Leftrightarrow \ln(0,3125) > n \times \ln(0,92)$$

$$0,92 < 1 \text{ donc } \ln(0,92) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,3125)}{\ln(0,92)} < n$$

$$\frac{\ln(0,3125)}{\ln(0,92)} = 13,95 \text{ à } 10^{-2} \text{ près et } n \text{ est un entier naturel.}$$

Donc la plus petite valeur de n est 14 et la date à partir de laquelle le nombre d'abonnés devient supérieur à 70 000 est le 1^{er} mars 2017.