Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un groupe de presse édite un magasine qu'il propose en abonnement.
Jusqu'en 2010, ce magasine était proposé uniquement sous forme papier. Depuis 2011, les abonnés du magasine ont le choix entre la version numérique et la version papier.
Une étude a montré que, chaque année, certains abonnés changent d'avis : 10 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique et 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier.
On admet que le nombre global d'abonnés reste constant dans le temps.
Pour tout nombre entier naturel n, on note :
a_n la probabilité qu'un abonné pris au hasard ait choisi la version papier l'année $2010+n$;
b_n la probabilité qu'un abonné pris au hasard ait choisi la version numérique l'année $2010+n$;
$P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$.
On a donc $a_0=1$, $b_0=0$ et $P_0=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.

1.a. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B où le sommet A représente l'état « abonné àn la version papier » et B l'état « abonnéà la version numérique ».
1.b. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre A et B des sommets.
1.c. Montrer que $P_1=\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\end{pmatrix}$

2. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1}=0,9\,a_n+0,06\,b_n$ et $b_{n+1}=0,1\,a_n+0,94\,b_n$.
Le directeur du groupe de presse souhaite visualiser l'évolution des deux types d'abonnements. Pour cela, on lui propose les deux algorithme suivants :

Algorithme 1
```
Entrée :        Saisir n
Traitement :    a prend la valeur 1
                b prend la valeur 0
                Pour i allant de 1 à n
                    a prend la valeur 0,9×a+0,06×b
                    b prend la valeur 0,1×a+0,94×b
                    Afficher a et b
                Fin Pour
```

Algorithme 2
```
Entrée :        Saisir n
Traitement :    a prend la valeur 1
                b prend la valeur 0
                Pour i allant de 1 à n
                    c prend la valeur a
                    a prend la valeur 0,9×a+0,06×b
                    b prend la valeur 0,1×c+0,94×b
                    Afficher a et b
                Fin Pour
```
Sachant qu'un seul des algorithmes proposés permet de répondre au souhait du directeur.
Préciser lequel en justifiant la réponse.

3.a. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1}=0,84\,a_n+0,06$.
3.b. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=a_n-0,375$
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,84 et calculer u_0 .
3.c. Donner une expression de u_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $a_n=0,375+0,625\times 0,84^n$

4. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la proportion d'abonnés à la version papier du magazine devient inférieure à 50 %.

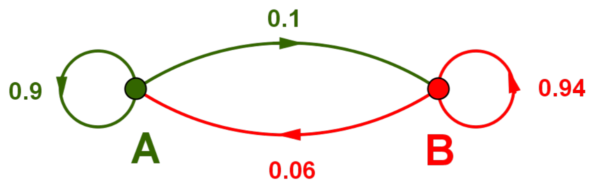
CORRECTION

1.a. Les deux sommets de l'arbre probabiliste sont A et B.

. Chaque année :
« 10 % des abonnés de la version papier passent à la version numétique »
donc 90 % des abonnés version papier resqtent à la version papier.
Conséquences
Le poids de l'arête AB est 0,1.
Le poids de l'arête AA est 0,9.

. Chaque année :
« 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier »
donc 94 % des abonnés à la version numériue restent à la version numérique.
Conséquences
Le poids de l'arête BA est 0,06.
Le poids de l'arête BB est 0,94.

. On obtient le graphe probabiliste :



1.b. L'ordre des sommets est A puis B.

La matrice de transition M du graphe est $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA : 0,9
m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,1
m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,06
m_{22} est le poids de l'arête BB : 0,94

$M=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}$

1.c. Pour tout entier naturel n :

$P_{n+1}=P_n M$

$P_1=P_0 M$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$

donc $P_1=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$

2. Remarque : *(démonstration non demandée)*

$P_{n+1}=\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}$ $\quad P_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$

$P_{n+1}=P_n M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,9\,a_n + 0,06\,b_n & 0,1\,a_n + 0,94\,b_n \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1}=0,9\,a_n+0,06\,b_n \\ b_{n+1}=0,1\,a_n+0,94\,b_n \end{cases}$

. C'est l'algorithme 2 qui permet de répondre au souhait du directeur.
Car dans l'algorithme 1 lorsque l'on calcule b on prend pour valeur de a la valeur obtenue à la ligne précédente et non la valeur de a de début de boucle (pour reprendre la bonne valeur de a il faut considérer la valeur de c).

3.a. Pour tout entier naturel n : $a_n+b_n=1$ donc $b_n=1-a_n$.

On a : $a_{n+1}=0{,}9\,a_n+0{,}06\,b_n$

donc $a_{n+1}=09\,a_n+0{,}06(1-a_n)=0{,}9\,a_n-0{,}06\,a_n+0{,}06=0{,}84\,a_n+0{,}06$.

3.b. Pour tout entier naturel n :

$u_n=a_n-0{,}375$ (donc $a_n=u_n+0{,}375$)

$u_{n+1}=a_{n+1}-0{,}375=0{,}84\,a_n+0{,}06-0{,}375=0{,}84\,a_n-0{,}315=0{,}84(u_n+0{,}375)-0{,}315$

$u_{n+1}=0{,}84\,u_n+0{,}84\times 0{,}375-0{,}315=0{,}84\,u_n+0{,}315-0{,}315=0{,}84\,u_n$

Donc (u_n) est la suite géométrique de raison 0,84 et de premier terme $u_0=a_0-0{,}375=1-0{,}375=0{,}625$.

3.c. Pour tout entier naturel n :

$u_n=u_0\,q^n=0{,}625\times 0{,}84^n$

$a_n=u_n+0{,}375=0{,}375+0{,}625\times 0{,}84^n$

4. On veut déterminer la plus petite valeur de n telle que $a_n<0{,}5$ (l'année demandée sera : 2010+n).

$a_n<0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}375+0{,}625\times 0{,}84^n<0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}625\times 0{,}84^n<0{,}5-0{,}375 \Leftrightarrow 0{,}625\times 0{,}84\,n<0{,}125$

$\Leftrightarrow 0{,}84^n<\dfrac{0{,}125}{0{,}625}=\dfrac{1}{5}=0{,}2$

ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}84^n)<\ln(0{,}2) \Leftrightarrow n\times\ln(0{,}84)<\ln(0{,}2)$

0,84< 1 donc ln(0,84)< 0

$\Leftrightarrow n>\dfrac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}84)}$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $\dfrac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}84)}=9{,}23$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel donc **la plus petite valeur de n est 10 et 2010+10= 2020 est l'année à partir de laquelle la proportion d'abonnés à la version papier devient inférieure à 50 %.**