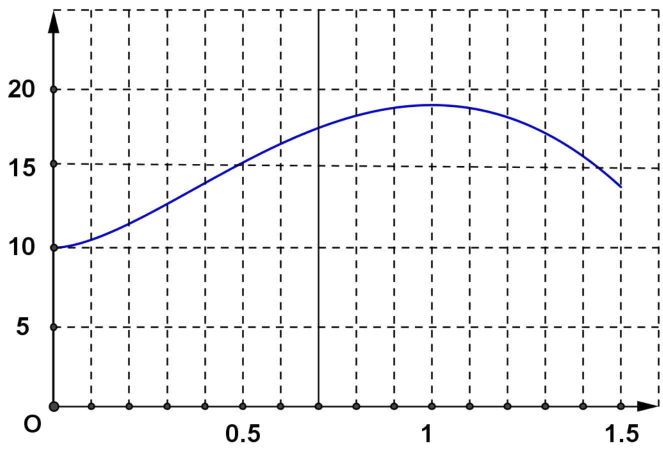
Exercice 4 6 points

Partie A : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle]0;1,5] par : $f(x)=9x^2(1-2\ln(x))+10$.
La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



1.a. Montrer que $f'(x)=-36x\ln(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle]0;1,5]
1.b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle]0;1,5].
1.c. Déduire de la question précédente les variations de la fonction f sur l'intervalle]0;1,5].

2. On admet que $f''(x)=-36\ln(x)-36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle]0;1,5].
Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1} .

3. Soit F la fonction définie sur l'intervalle]0;1,5] par $F(x)=10x+5x^2-6x^3\ln(x)$.
3.a. Montrer que F est une primitive de la fonction f sur]0;1,5].
3.b. Calculer $\int_1^{1,5} f(x)\,dx$; on donnera le résultat arrondi au centième.

Partie B : Application économique

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Une société est cotée en bourse depuis un an et demi.
Le prix de l'action depuis un an et demi est modélisé par la fonction f définie dans la partie A où x représente le nombre d'années écoulées depuis l'introduction en bourse et f(x) représente le prix de l'action, exprimé en euros.
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Proposition 1 :
« Sur la période des six derniers mois, l'action a perdu plus d'un quart de sa valeur »
Proposition 2 :
« Sur la période des six derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été inférieure à 17€ ».

CORRECTION

Partie A : Etude d'une fonction

Pour tout nombre réel x de l'intervalle]0;1,5] : $f(x)=9x^2(1-2\ln(x))+10$

1.a. f est dérivable sur]0;1,5]

$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ $\quad (9x^2)'=18x$ $\quad (10)'=0$

On dérive un produit

$$f'(x)=18x(1-2\ln(x))+9x^2\left(\frac{-2}{x}\right)=18x-36x\ln(x)-18x=-36x\ln(x)$$

1.b. Pour tout nombre réel de l'intervalle]0;1,5], le signe de $f'(x)$ est le signe de -ln(x).

Si $0<x<1$ alors $\ln(x)<\ln(1)=0$ et $-\ln(x)>0$

Si $1<x\leqslant 1{,}5$ alors $0=\ln(1)<\ln(x)$ et $-\ln(x)<0$

On donne les résultat sous la forme d'un tableau.

x	0		1		1.5
f '(x)	||	+	0	−	

1.c. Sur l'intervalle]0;1] f est une fonction croissante.

Sur l'intervalle [1;1,5] f est une fonction décroissante.

On donne les variations de la fonction f sous la forme d'un tableau, mais on ne calcule pas les valeurs de f(x) aux bornes.

x	0		1		1.5
f '(x)	||	+	0	−	
f(x)	||	↗	19	↘	

$f(1)=9\times 1+10=19$

2. On admet que $f''(x)=-36\ln(x)-36=36(-\ln(x)-1)$

Le signe de $f''(x)$ est le signe de $-\ln(x)-1$

$-\ln(x)-1\geqslant 0 \Leftrightarrow -1\geqslant\ln(x) \Leftrightarrow e^{-1}\geqslant x$.

Si $0<x<e^{-1}$ alors $f''(x)>0$

Si $e^{-1}<x\leqslant 1{,}5$ alors $f''(x)<0$

<u>Conséquences</u>

f est convexe sur $]0;e^{-1}]$ et f est concave sur $[e^{-1};1{,}5]$ donc le point I d'abscisse e^{-1} est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle]0;1,5] : $F(x)=10x+5x^3-6x^3\ln(x)$

3.a. F est une primitive de f sur]0;1,5] si et seulement si pour tout nombre réel de l'intervalle]0;1,5], on ait $F'(x)=f(x)$.

$(10x)'=10$ $\quad (5x^3)'=15x^2$ $\quad (-6x^3)'=-18x^2$ $\quad (\ln(x))'=\frac{1}{x}$

donc $\left(-6x^3\ln(x)\right)'=-18x^2\ln(x)-6x^3\times\frac{1}{x}=-18x^2\ln(x)-6x^2$

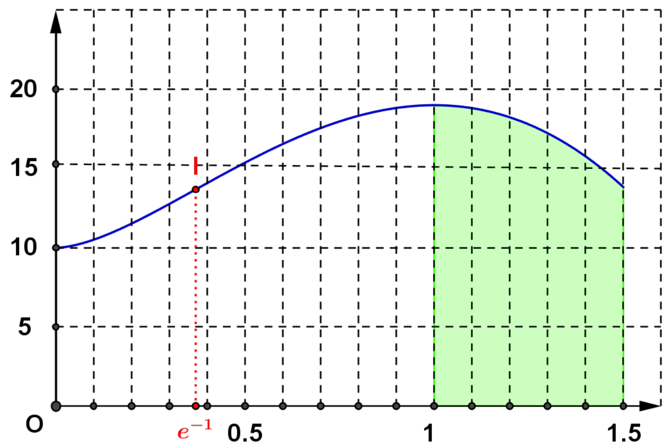
et $F'(x)=10+15x^2-18x^2\ln(x)-6x^2=9x^2-18x^2\ln(x)+10=9x^2(1-2\ln(x))+10=f(x)$

F est une primitive de f sur]0;1,5]

3.b. $\int_1^{1,5} f(x)\,dx=F(1,5)-F(1)=15+5\times1,5^3-6\times1,5^3\ln(1,5)-10-5\times1^3-0=5\times1,5^3-6\times1,5^3\ln(1,5)$

$\int_1^{1,5} f(x)\,dx$ = **8,66** à 10^{-2} près

Remarque (*figure non demandée*)
Cette intégrale est égale à l'aire ,en unité d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x=1$ et $x=1,5$.



Partie B : Application économique

Remarque
L'unité sur l'axe des abscisses est une année (c'est à dire 12 mois) et 6mois correspond à 0,5 année.

Pour la proposition 1, il faut comparer f(1) et f(1,5)
$f(1)=19$ et $f(1,5)=9\times1,5^2(1-2\ln(1,5))+10=13,83$ à 10^{-2} près
Si sur la période des six derniers mois l'action a perdu un quart de sa valeur, le coefficient multiplicateur est : 1-0,25=0,75.
$19\times0,75=14,25$
Or $13,83<14,25$ donc **la proposition 1 est vraie.**

Pour la proposition 2, il faut calculer la valeur moyenne de l'action sur les derniers mois
$m=\frac{1}{1,5-1}\int_1^{1,5} f(x)\,dx=\frac{1}{0,5}\int_1^{1,5} f(x)\,dx=2\int_1^{1,5} f(x)\,dx=2\times8,66=17,32$ à 10^{-2} près
Or $17,32 > 17$ donc **la proposition 2 est fausse.**

