Exercice 2 6 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle [1;45] par : $g(x)=-20x+5x\ln(x)+30$

1.a. On note g' la fonction dérivée de g.
Montrer que, pour tout x appartenant à [1;45], on a $g'(x)=-15+5\ln(x)$.

1.b. Montrer que l'inéquation $-15+5\ln(x)\geqslant 0$ est équivalente à $x\geqslant e^3$.

1.c. Dresser le tableau de variations de la fonction g (les valeurs seront arrondies au centième si besoin).

2.a. Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α sur l'intervalle [1;45].

2.b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.

2.c. En déduire le de g(x) suivant les valeurs de x dans l'ntervalle [1;45].

3. On considère la fonction G définie sur l'intervalle [1;45] par :
$G(x)=-11{,}25x^2+2{,}5x^2\ln(x)+30x$
Montrer que G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle [1;45].

4.a. Calculer une valeur approchée au dixième de l'intégrale $\int_{10}^{45} g(x)\,dx$.

4.b. Déduire de la question précédente la valeur moyenne de g sur l'intervalle [10;45].
Arrondir le résultat à l'unité.

Partie B

Un ballon sonde, lâché à une altitude de 1 km, relève en continu la température amosphérique jusqu'à 45 km d'altitude.
On admet que la fonction g définie dans la partie A modélise la température de l'air, exprimée en degré Celsius en fonction de l'altitude x du ballon sonde, exprimée en km.
A l'aide des résultats de la partie A, répondre aux questions suivantes.

1. Déterminer l'altitude à partir de laquelle la température devient inférieure à 0 degré Celsuis.

2. Déterminer la température minimale relevée par la sonde.

3. On appelle stratosphère la couche admosphérique se situant entre 10 km et 45 km d'altitude.
Determininr la température moyenne de la stratosphère. Le résultat sera arrondi au degré au degré.

CORRECTION

Partie A

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;45] : $g(x)=-20x+5x\ln(x)+30$

1.a. $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ $\quad (x\ln(x))'=1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}=\ln(x)+1$

g est dérivable sur [1;45].

$g'(x)=-20+5(\ln(x)+1)=-15+5\ln(x)$

1.b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;45]

$-15+5\ln(x)\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad 5\ln(5)\geqslant 15 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(x)\geqslant\frac{15}{5}=3$

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\quad e^{\ln(x)}\geqslant e^3 \quad\Leftrightarrow\quad x\geqslant e^3$

1.c. $e^3=20{,}09$ à 10^{-2} donc $1<e^3<45$

Si $e^3\leqslant x\leqslant 45$ alors $0\leqslant g'(x)$

Si $1\leqslant x\leqslant e^3$ alors $g'(x)\geqslant 0$

$g(1)=10 \quad g(45)=-900+225\ln(45)+30=-13{,}50$ à 10^{-2} près

$g(e^3)=-20e^3+15e^3+30=-5e^3+30=-70{,}43$ à 10^{-2} près

x	1		e^3		45
g'(x)		−	0	+	
g(x)	10		-70.43		-13.50

2.a. g est continue et stritement décoissante sur $[1;e^3]$ et $g(1)>0$ et $g(e^3)<0$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution α de l'équation g(x)=0 appartient à l'intervalle $[1;e^3]$.

Sur l'intervalle $[e^3;45]$, la fonction g est strictement croissante et g(45)<0 donc l'équation g(x)=0 n'admet pas de solution dans cet intervalle.

<u>Conclusion</u>

L'équation g(x)=0 admet une unique solution α appartenant à l'intervalle [1;45].

2.b. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$g(1{,}7)=0{,}510$ à 10^{-3} près et $g(1{,}8)=-0{,}710$ à 10^{-3} près donc $1{,}7<\alpha<1{,}8$

$g(1{,}74)=0{,}019$ à 10^{-3} près et $g(1{,}75)=-0{,}103$ à 10^{-3} près donc $1{,}74<\alpha<1{,}75$

2.c. Si $1\leqslant x<\alpha$ alors $g(x)>g(\alpha)=0$

Si $\alpha<x\leqslant e^3$ alors $g(\alpha)=0>g(x)$

Si $e^3\leqslant x\leqslant 45$ alors $g(x)\leqslant g(45)<0$

On donne le signe de g(x) sur la forme d'un tableau.

x	1		α		45
g(x)		+	0	−	

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;45] : $G(x)=-11{,}25x^2+25x^2\ln(x)+30x$

G est dérivable sur [1;45]

$(x^2 \ln(x))' = 2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x\ln(x) + x$

$G'(x) = -11{,}25 \times 2x + 2{,}5(2x\ln(x) + x) + 30 = -22{,}5x + 5x\ln(x) 2{,}5x + 30 = -20x + 5x\ln(x) + 30 = g(x)$

G est une primitive de g sur [1;45]

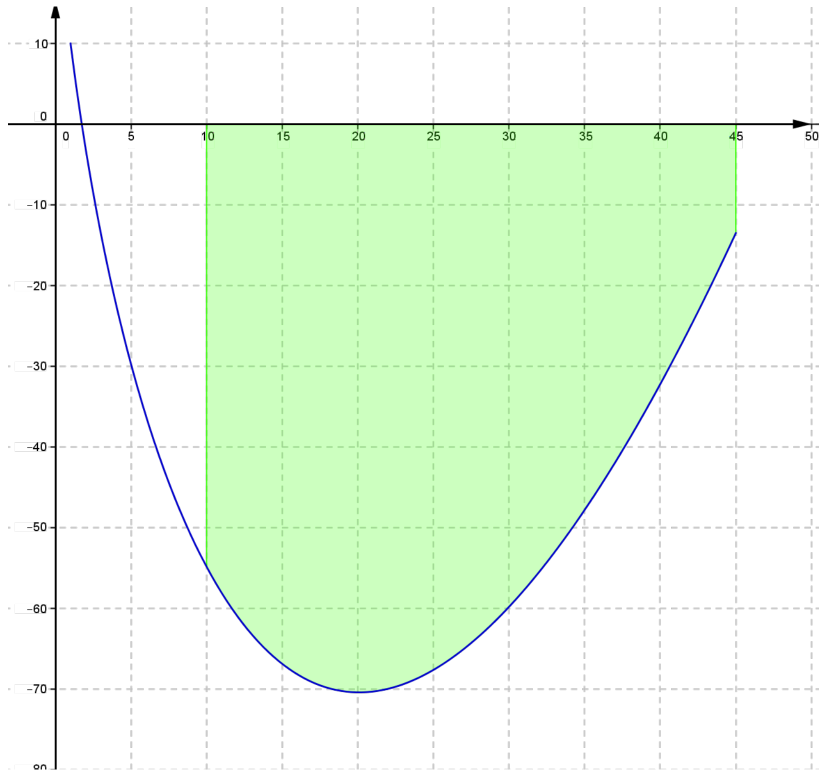
4.a. $\int_{10}^{45} g(x)\,dx = G(45) - G(10)$

$= -11{,}25 \times 45^2 + 2{,}5 \times 48^2 \ln(45) + 30 \times 45 - (-11{,}25 \times 10^2 + 2{,}5 \times 10^2 \ln(10) + 30 \times 10)$

$=$ **-1910,7** à 10^{-1} près.

Remarque

g est négative sur [10;45] donc $\int_{10}^{45} g(x)\,dx$ est l'opposé de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan coloré en vert la figure suivante.



4.b. La valeur moyenne de g sur [10;45] est : $m = \frac{1}{45-10} \int_{10}^{45} g(x)\,dx = \frac{1}{35} \int_{10}^{45} g(x)\,dx$

m = -55 à l'unité près.

Partie B

1. $g(\alpha) = 0$ pour $1{,}74 < \alpha < 1{,}75$

La température devient inférieure à 0 degé Celsius à partir de 1,75 km.

2. **La température minimale est le minimum de g soit -40,43 degré Celsius.**

3. **La température moyenne de la stratosphère est la valeur moyenne de g sur [10;45] donc -55 degrés Celsius.**