

Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Le gérant d'un hôtel situé dans la ville de Lyon étudie la fréquentation de son établissement afin de prévoir au mieux son budget pour les années futures.

Le 5 décembre 1998, le site historique de Lyon a été inscrit au patrimoine mondial de L'UNESCO et l'hôtel a vu son nombre de clients augmenter significativement comme l'indique le tableau ci-dessous :

Année	1997	1998	1999	2000
Nombre de clients	950	1105	2103	2470

- Déterminer le pourcentage d'augmentation du nombre de clients entre 1997 et 2000.
Par ailleurs, depuis le 1^{er} janvier 2000, une étude statistique a permis de mettre en évidence que, chaque année, l'hôtel compte 1200 nouveaux clients et que 70 % des clients de l'année précédente reviennent. On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre total de clients de l'hôtel durant l'année $2000+n$.
On a ainsi $u_0=2470$ et, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1}=0,7u_n+1200$.
- Déterminer le nombre de client durant l'année 2001.
- Le gérant de l'hôtel souhaite déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de clients dépassera 3900. Indiquer, en justifiant, lequel des algorithmes suivants donne l'année correspondante.

Algorithme 1

Initialisation : U prend la valeur 2470
N prend la valeur 0
Traitement : Tant que $U < 3900$
U prend la valeur $0,7U+n$
N prend la valeur $N+1$
Fin Tant que
Sortie : Afficher N

Algorithme 2

Initialisation : U prend la valeur 2470
N prend la valeur 0
Traitement : Tant que $U > 3900$
U prend la valeur $0,7U+1200$
N prend la valeur $N+1$
Fin Tant que
Sortie : Afficher N

Algorithme 3

Initialisation : U prend la valeur 2470
N prend la valeur 0
Traitement : Tant que $U < 3900$
U prend la valeur $0,7U+1200$
N prend la valeur $N+1$
Fin Tant que
Sortie : Afficher U

- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 4000$.
 - Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q=0,7$ et préciser le premier terme
 - Exprimer v_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
 - Justifier que $u_n = 4000 - 1530 \times 0,7^n$ pour tout entier naturel n .
 - Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de clients a dépassé 3900.
- A long terme, déterminer le nombre de clients que le gérant de l'hôtel peut espérer avoir chaque année.

CORRECTION

1. Le pourcentage d'augmentation du nombre de clients entre 1997 et 2000 est :

$$\frac{2470-950}{950} \times 100 = \frac{1520}{950} \times 100 = \mathbf{160 \%}$$

2. Le nombre total de clients durant l'année 2001 est :

$$u_1 = 0,7 \times 2470 + 1200 = \mathbf{2929}$$

3. L'algorithme 3 affiche U donc n'affiche pas une année ce n'est pas le bon algorithme.

Pour l'algorithme 2 on a pour instruction $U > 3900$ or $U=2470$ cet algorithme affiche $2000+0=2000$, ce n'est pas le bon algorithme.

Conclusion

Le bon algorithme est l'algorithme 1.

4. Pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_n - 4000 \text{ donc } u_n = v_n + 4000$$

- 4.a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4000 = 0,7u_n + 1200 - 4000 = 0,7(v_n + 4000) - 2800 = 0,7v_n + 2800 - 2800 = 0,7v_n$$

$$v_0 = u_0 - 4000 = 2470 - 4000 = -1530$$

(v_n) est la suite géométrique de premier terme -1530 et de raison 0,7

- 4.b. Pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times q^n = -1530 \times 0,7^n$$

- 4.c. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = v_n + 4000 = 4000 - 1530 \times 0,7^n$$

- 4.d. $4000 - 1530 \times 0,7^n > 3900 \Leftrightarrow 100 > 1530 \times 0,7^n \Leftrightarrow \frac{100}{1530} > 0,7^n \Leftrightarrow \frac{10}{153} > 0,7^n$

ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{10}{153}\right) > \ln(0,7^n) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{10}{153}\right) > n \times \ln(0,7)$$

$$0 < 0,7 < 1 \text{ donc } \ln(0,7) < 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{10}{153}\right) : \ln(0,7) < n$$

$$\text{Or } \ln\left(\frac{10}{153}\right) : \ln(0,7) = 7,65 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

n est un entier naturel donc $n \geq 8$

Le plus petit entier naturel n est 8.

2000+8=2008 est la première année, à partir de la quelle le nombre de clients aura dépassé 3900.

5. $0 < 0,7 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,7^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4000$.

A long terme, le gérant peut espérer un nombre de clients voisinde 4000 chaque année.