Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Un groupe de touristes a réservé toutes les chambres d'un hôtel-restaurant à Venise qui propose tous les soirs à ses pensionnaires le choix entre un menu gastronomique et un menu traditionnel.
On considère pour la modélisation, que chaque soir les clients choisissent un des deux menus et que le restaurant est résevé aux clients de l'hôtel.

Une étude sur les habitudes des clients montre que, si un soir donné, un client choisit le menu gastronomique, il choisit également le menu gastronomique le soir suivant dans 60 % des cas.
Si le client choisit le menu traditionnel un soir donné, il choisit également le menu traditionnel le soir suivant dans 70 % des cas.

Afin de mieux prévoir ses commandes pour la saison estivale, le gérant souhaite connaître la proportion des des clients choisissant le menu gastronomique ou le menu traditionnel à partir du 1^{er} juin 2015.
Ce soir-là, 55 % des clients ont choisi le menu gastronomique.
On note g_0 la probabilité qu'un client ait choisi le menu gastronomique le soir du 1^{er} juin 2015 ; on a donc $g_0=0{,}55$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note g_n la probabilité qu'un client choisit au hasard prenne le menu gastronomique le $n^{ième}$ soir après le 1^{er} juin 2015.
Ainsi g_1 est la probabilité qu'un client ait choisi le menu gastronomique le soir du 2 juin 2015.
De la même façon, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note t_n la probabilité qu'un client, choisi au hasard, prenne le menu traditionnel le $n^{ième}$ soir après le 1^{er} juin 2015.

On note P_n la matrice $\begin{pmatrix} g_n & t_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste au $n^{ième}$ soir.
On note G l'état « le client choisit le menu gastronomique » et T l'état « le client choisit le menu traditionnel ».

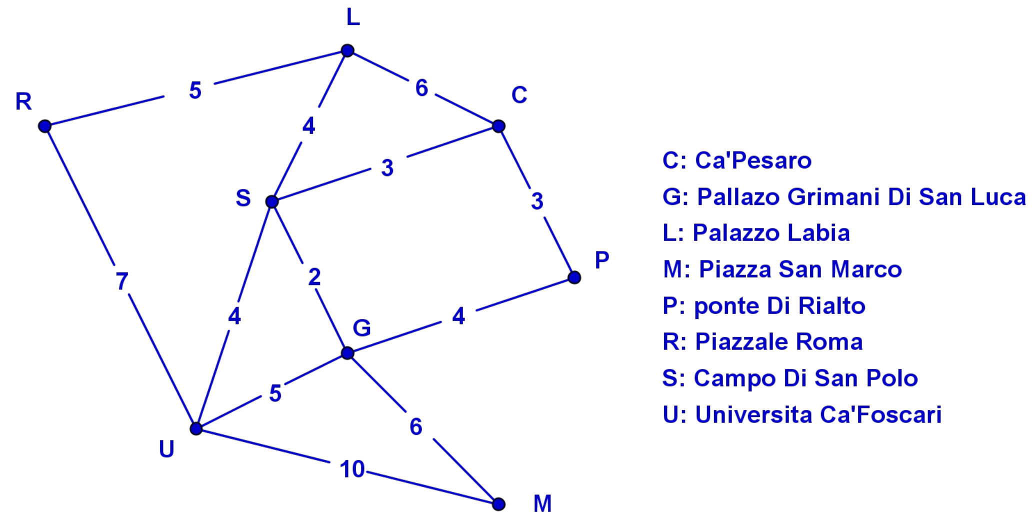
1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets G et T.
Dans la suite de l'exercice, on admet que la matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique est : $M=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

2.a Donner la matrice P_0 correspondant à l'état initial.
2.b. Calculer la probabilité qu'un client choisisse le menu le menu gastronomique le 4 juin 2015. on arrondira au centième.

3.a. Déterminer la matrice $P=\begin{pmatrix} g & t \end{pmatrix}$ correspondant à l'état stable du graphe probabiliste.
3.b. Interpréter ce résultat dans le contexe de l'exercice.

Partie B

L'hôtel propose également à ses clients des balades en gondole sur les canaux de Venise.
Le graphe ci-après représente les principaux canaux de Venise empruntés par le gondolier.
Chaque arête représente un canal et chaque sommet un lieu de la ville.
Le poids de chaque arête représente la durée de parcours, exprimée en minutes, entre deux lieux de la ville en empruntant les canaux.



Le gondolier employé par l'hôtel inspecte régulièrement les canaux pour en vérifier la navigabilité.
Il souhaite optimiser son trajet en inspectant une fois et une seule chaque canal.

1. Justifier qu'un tel trajet est possible et indiquer quels sont les lieux possibles de départ et d'arrivée.

2. Déterminer la durée pour effectuer ce trajet.

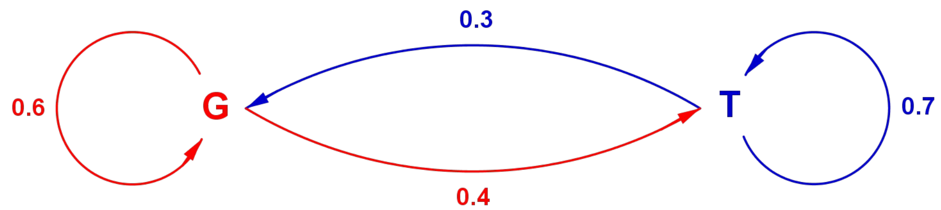
CORRECTION

1. Les sommets du graphe probabiliste sont G et T.

. « Si un soir donné, un client choisit le menu gastronomique, il choisit également le menu gastronomique le soir suivant dans 60 % des cas » donc il choisit le menu traditionnel dans 40 % des cas.
Conséquences
Le poids de l'arête GG est 0,6.
Le poids de l'arête GT est 0,4.

. « Si le client choisit le menu traditionnel un soir donné, il choisit également le menu traditionnel le soir suivant dans 70 % des cas » donc il choisit le menu gastronomique dans 30 % des cas.
Conséquences
Le poids de l'arête TT est 0,7.
Le poids de l'arête TG est 0,3.

. On obtient Le graphe probabiliste suivant :



On admet que la matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique.

$$M=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\ 0,3 & 0,7\end{pmatrix}$$

Remarque
Dans cet exercice on considère les matrices lignes.

2.a. Le soir du 1^{er} juin 2015, 55 % des clients ont choisi le menu gastronomique,
donc $g_0=0,55$ et $t_0=1-0,55=0,45$ et $P_0=\begin{pmatrix}0,55 & 0,45\end{pmatrix}$.

2.b. P_3 correspond à l'état probabiliste le 4 juin 2015.

$P_3=P_0M^3$

En utilisant la calculatrice on obtient :

$$M^3=\begin{pmatrix}0,444 & 0,556\\ 0,417 & 0,583\end{pmatrix}$$

$$P_0M^3=\begin{pmatrix}0,43185 & 0,56815\end{pmatrix}$$

En arrondissant au centième

$$P_3=\begin{pmatrix}0,43 & 0,57\end{pmatrix}$$

La probabilité qu'un client choisisse le menu gastronomique le 4 juin 2015 est g_3 = **0,43**

3.a. $P=\begin{pmatrix}g & t\end{pmatrix}$ correspond à l'état stable du graphe probabiliste si et seulement si P=PM et g+t=1.

$$PM=\begin{pmatrix}g & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\ 0,3 & 0,7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,6g+0,3t & 0,4g+0,7t\end{pmatrix}$$

$$P=PM \Leftrightarrow \begin{cases}g=0,6g+0,3t\\ t=0,4g+0,7t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0,4g-0,3t=0\\ 0,4g-0,3t=0\end{cases} \Leftrightarrow \{0,4g-0,3t=0$$

Or on a : g+t=1 donc t=1-g

$$0,4g-0,3(1-g)=0 \Leftrightarrow 0,7g=0,3 \Leftrightarrow g=\frac{3}{7} \quad \text{donc} \quad t=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$$

Conclusion

$P=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{4}{7}\end{pmatrix}$ correspond à l'état stable du graphe probabiliste.

3.b. $\frac{3}{7}=0{,}4285$ **à** 10^{-4} près.

Dans un avenir « lointain », 42,85 % des clients du soir choisiront le menu gastronomique.

Partie B

1. On nous demande si le graphe admet une chaîne eulérienne.

Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si lenombre de sommets de degé impair est 0 ou 2.

On détermine le degré de tous les sommets du graphe et on donne le résultat sous la forme d'un tableau.

Sommets	C	G	L	M	P	R	S	U
Degrés	3	4	3	2	2	2	4	4

Il existe deux (et deux seulement) sommets de degré impair donc le graphe admet une chaîne eulérienne.
Les lieux possibles de départ et d'arrivée sont les sommets de degré impair ici C et L.
On part de C pour arriver à L ou on part de L pour arriver à C.
Exemple de parcours
C-P-G-M-U-R-L-S-U-G-S-C-L

2. La durée pour ce trajet est la somme des durées des 12 arêtes.
$3+4+6+10+7+5+4+4+5+2+3+6 =$ **59 minutes.**