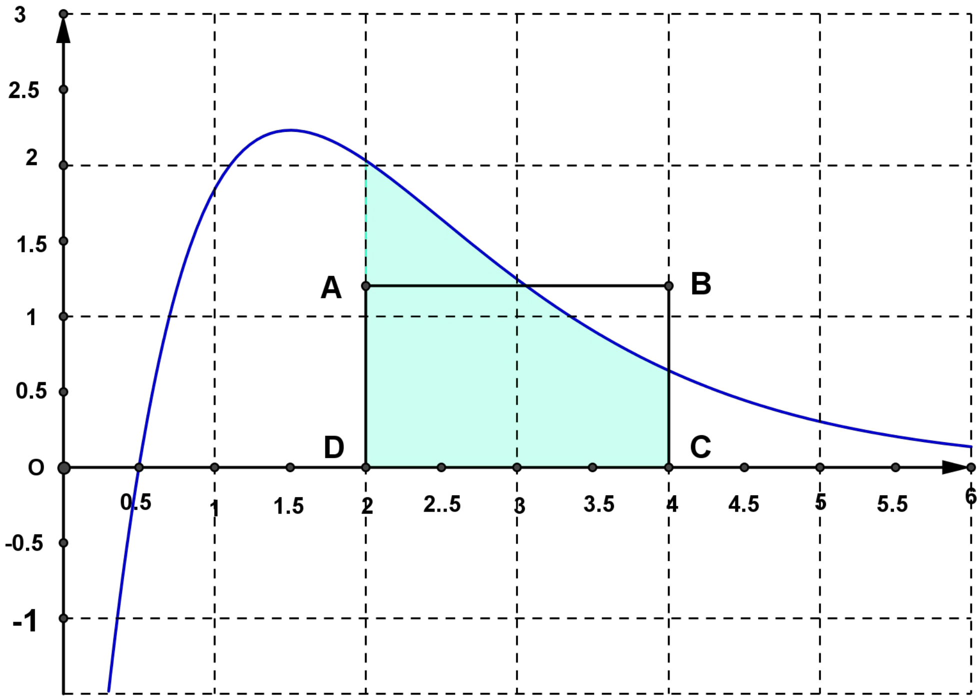
Exercice 3 — 7 points

La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [0;6].
ABCD est un rectangle, le point D a pour coordonnées (2;0) et le point C a pour coordonnées (4;0).



Partie A
Dans cette partie A, les réponses seront données à partir d'une lecture graphique.

1. Résoudre graphiquement l'inéquation : f(x) > 0.
2. Avec la précision permise par le graphique, donner une valeur approchée du maximum de la fonction f sur l'intervalle [0;6].
3. Quel semble être le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [2;6] ? Justifier.
4. Pour quelle(s) raison(s) peut-on penser que la courbe admet un point d'inflexion ?
5. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de $\int_2^4 f(x)\,dx$.

Partie B

La fonction f est la fonction définie sur l'intervalle [0;6] par $f(x)=(10x-5)e^{-x}$.
Un logiciel de calcul formel a donné les résultats suivants (on ne demande pas de les justifier) :
$f'(x)=(-10x+15)e^{-x}$ $\qquad f''(x)=(10x-25)e^{-x}$

1. Dresser le tableau de variation de f en précisant la valeur de l'extrémum et les valeurs aux bornes de l'ensemble de définition.
2. Etudier la convexité de f sur l'intervalle [0;6]
3. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [0;6] par $F(x)=(-10x-5)e^{-x}$ est une primitive de f sur l'intervalle [0;6].
4. En déduire la valeur exacte puis une valeur approchée au centième de $\int_2^4 f(x)\,dx$.
5. On souhaiterait que l'aire du rectangle ABCD soit égale à l'aire du domaine coloré en bleu sur la figure. Déterminer à 0,01 près la hauteur AD de ce rectangle.

CORRECTION

Partie A

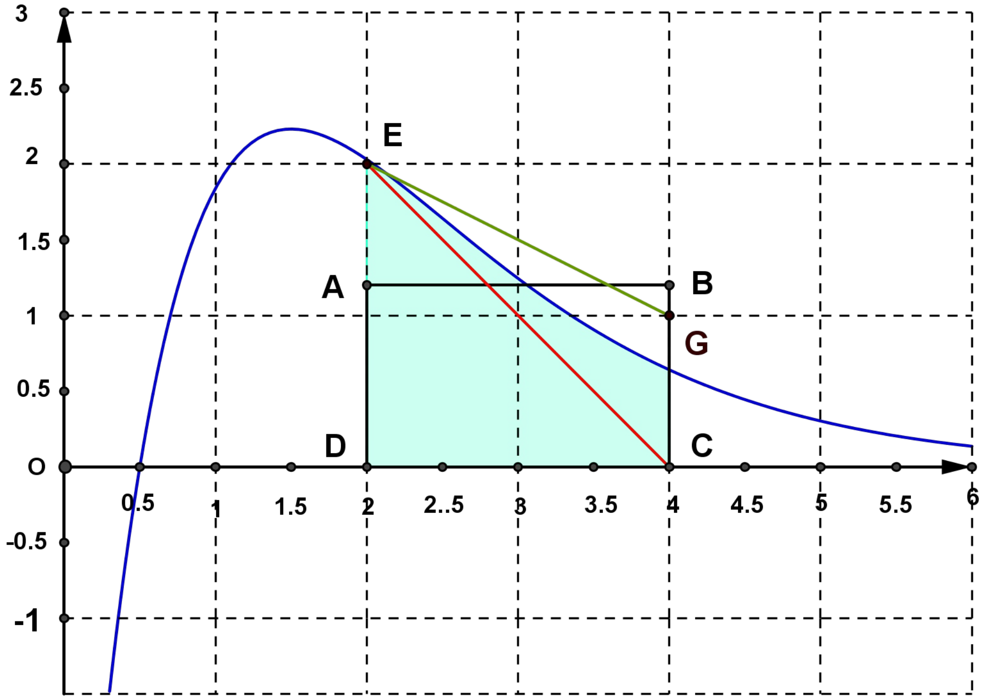
1. La courbe représentative de f est au dessus de l'axe des abscisses si et seulement si x appartient à l'intervalle }0,5;6].
Donc **l'ensemble des solutions de l'inéquation : f(x) > 0 est S=}0,5;6].**

2. Par lecture graphique, f est maximale pour x = 1,5 et **la valeur du maximun est 2,2.**

3. f est décroissante sur [2;6] donc $f'(x)$ **est négative sur [2;6].**

4. La tangente au point d'abscisse 2 est au dessus de la courbe et la tangente au point d'abscisse 4 est en dessous de la courbe. Donc **la courbe représentive de f doit admettre un point d'inflexion d'abscisse appartenant à l'intervalle [2;4].**

5. L'unité d'aire est l'aire d'un carré de côté l'unité de longueur.
f est continue et positive sur [2;4] donc $\int_2^4 f(x)\,dx$ est l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=2 et x=4 (partie colorée en bleu sur la figure).



On évalue que l'aire de la partie de plan colorée en bleu est supérieure à 2 unités d'aire et inférieure à 3 unités d'aire, donc $2 < \int_2^4 f(x)\,dx \leqslant 3$

Remarque
On peut facilement justifier cet encadrement, on place les points E(2;2) et G(4;1)
Le triangle EDC est contenu dans la partie colorée bleu et le trapèze DEGC contient la partie colorée en bleu.
L'aire du triangle EDC est $\frac{2\times 2}{2}=2$ unités d'aire. L'aire du trapèze DEGC est $\frac{(2+1)\times 2}{2}=3$ unités d'aire.

Partie B

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;6] $f(x)=(10x-5)e^{-x}$.

$f'(x)=(-10x+15)e^{-x}$ $f''(x)=(10x-25)e^{-x}$

1. $f'(x)=(-10x+15)e^{-x}$

Pour tout réel x de l'intervalle [0;6] on a : $e^{-x}>0$ donc le signe de f'(x) est le signe de (-10x+15).

$-10x+15\geqslant 0 \Leftrightarrow 15\geqslant 10x \Leftrightarrow 1{,}5\geqslant x$

$-10x+15<0 \Leftrightarrow 15\leqslant 10x \Leftrightarrow 1{,}5\leqslant x$ $f(0)=-5e^{0}=-5$

x	0	1.5	6
f'(x)	+	0	−
f(x)	-5 ↗	f(1.5)	↘ f(6)

$f(0)=-5e^{0}=-5$

$f(1{,}5)=10e^{-1{,}5}=2{,}23$ à 10^{-2} près

$f(6)=55e^{-6}=0{,}14$ à 10^{-2} près

2. Pour étudier la convexité de f, on étudie le signe de $f''(x)$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;6] $f''(x)=(10x-25)e^{-x}$.

Le signe de $f''(x)$ est le signe de (10x-25).

$10x-25\geqslant 0 \Leftrightarrow 10x\geqslant 25 \Leftrightarrow x\geqslant 2{,}5$

$10x-25\leqslant 0 \Leftrightarrow 10x\leqslant 25 \Leftrightarrow x\leqslant 2{,}5$

<u>Conclusion</u>

f est concave sur [0;2,5] et f estconvexe sur [2,5;6] et le point d'abscisse 2,5 de la courbe représentative de f est un point d'inflexion de cette courbe.

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;6] $F(x)=(-10x-5)e^{-x}$.

F est dérivable sur [0;6]

$(e^{-x})'=-e^{-x}$ et $(-10x-5)'=-10$

On dérive un produit

$F'(x)=-10e^{-x}+(-10x-5)(-e^{-x})=-10e^{-x}+(10x+5)e^{-x}=(10x-5)e^{-x}=f(x)$

F est une primitive de f sur [0;6].

4. $\int_2^4 f(x)\,dx$ = F(4)-F(2) = $-45e^{-4}+25e^{-2}$ = **2,56 à** 10^{-2} **près.**

5. La base du rectangle est DC = 2. L'aire du rectangle est $\int_2^4 f(x)\,dx$.

Donc la hauteur du rectangle est égale à h telle que : $2\times h = \int_2^4 f(x)\,dx$

$h=\frac{1}{2}\int_2^4 f(x)\,dx$ = **1,28 à** 10^{-2} **près**

<u>Remarque</u>

h est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [2;4].