

Exercice 2 **Candidats ayant suivi l'enseignement spécialité** **5 points**

Dans une salle de sport, trois activités sont proposées : Pilates(P) ; Step(S) et Zumba(Z).

D'une semaine sur l'autre les abonnés peuvent changer d'activité.

Au 1^{er} septembre 2015, il y a 10 % des abonnés inscrits en Pilates, 85 % en Step et 5 % en Zumba.

D'après l'analyse des données des années précédentes, le gérant prévoit que, d'une semaine sur l'autre :

- Si l'abonné était en Pilates, la semaine suivante il conserve Pilates dans 30 % des cas, sinon il choisit Step dans 10 % des cas et Zumba dans 60 % des cas.
- Si l'abonné était en Step, la semaine suivante il conserve Step dans 30 % des cas, sinon il choisit Pilates dans 50 % des cas et Zumba dans 20 % des cas.
- Si l'abonné était en Zumba, la semaine suivante il conserve Zumba dans 20 % des cas, sinon il choisit Pilates dans 20 % des cas et Step dans 60 % des cas.

On considère qu'il n'y a pas de nouveaux abonnés et pas de départ tout au long de l'année.

Soit $E_n = \begin{pmatrix} p_n & s_n & z_n \end{pmatrix}$, la matrice ligne décrivant l'état probabiliste de la répartition parmi les trois activités P, S et Z, n semaines après le 1^{er} septembre 2015.

1. Donner, sans justification, la matrice E_0 .
2. Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets P, S et Z.
3. On donne M la matrice carrée 3x3 de transition respectant l'ordre P, S et Z.

$$M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$$

3.a. Préciser la signification du coefficient 0,5 dans la matrice M.

3.b. Calculer E_1 .

3.c. Déterminer la répartition prévisible dans chaque activité au bout de trois semaines.

4. Peut-on affirmer à 10^{-2} près, qu'au bout de 6 semaines environ $\frac{1}{3}$ des abonnés se répartissent dans chaque activité.

5. Au 1^{er} septembre 2015 on compte 120 abonnés dans cette salle de sport. Combien peut-on prévoir d'abonnés dans chaque activité, 8 semaines après cette date ?

6.a. Conjecturer la valeur exacte des coefficients de la matrice ligne E correspondant à l'état probabiliste stable

6.b. Vérifier cette conjecture.

CORRECTION

1. $E_0 = (0,1 \quad 0,85 \quad 0,05)$

2. Les trois sommets du graphe probabiliste sont : P, S et Z.

- « Si l'abonné était en Pilates, la semaine suivante il conserve Pilates dans 30 % des cas, sinon il choisit Step dans 10 % des cas et Zumba dans 60 % des cas ».

Donc le poids de l'arête PP est 0,3 ; le poids de l'arête PS est 0,1 et le poids de l'arête PZ est 0,6.

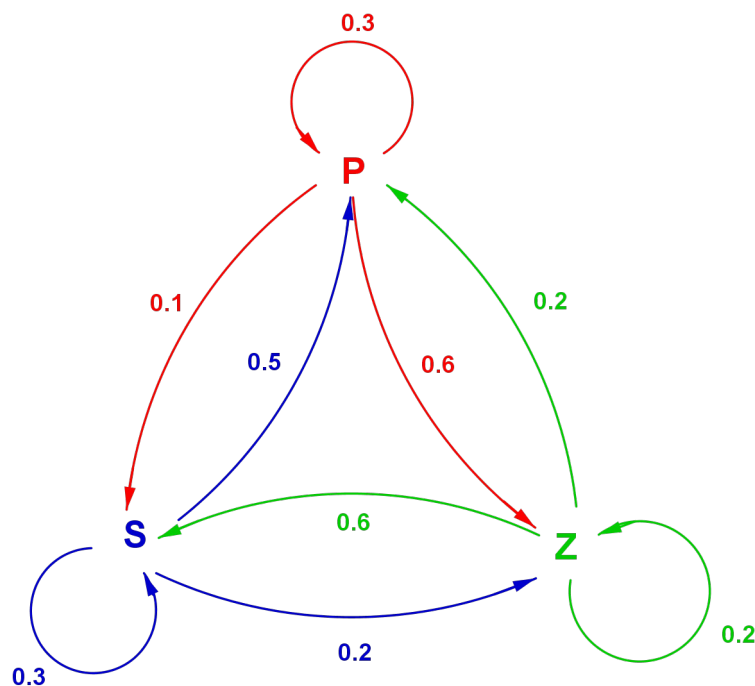
- « Si l'abonné était en Step, la semaine suivante il conserve Step dans 30 % des cas, sinon il choisit Pilates dans 50 % des cas et Zumba dans 20 % des cas ».

Donc le poids de l'arête SS est 0,3 ; le poids de l'arête SP est 0,5 et le poids de l'arête SZ est 0,2.

- « Si l'abonné était en Zumba, la semaine suivante il conserve Zumba dans 20 % des cas, sinon il choisit Pilates dans 20 % des cas et Step dans 60 % des cas ».

Donc le poids de l'arête ZZ est 0,2 ; le poids de l'arête ZP est 0,2 et le poids de l'arête ZS est 0,6.

- On obtient le graphe probabiliste suivant :



3.

$$M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$$

3.a. Dans l'exercice on utilise les matrices lignes donc $M = (m_{ij})$ (i : ligne et j : colonne)

m_{ij} esle poids de l'arête joignant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet

$0,5 = m_{ij}$ donc **0,5 estle poids de l'arête SP.**

3.b. $E_1 = E_0 M = (0,1 \quad 0,85 \quad 0,05) \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$

$$E_1 = (0,1 \times 0,3 + 0,85 \times 0,5 + 0,05 \times 0,2 \quad 0,1 \times 0,1 + 0,85 \times 0,3 + 0,05 \times 0,6 \quad 0,1 \times 0,6 + 0,85 \times 0,2 + 0,05 \times 0,2)$$

$$E_1 = (0,03 + 0,425 + 0,01 \quad 0,01 + 0,255 + 0,03 \quad 0,06 + 0,17 + 0,01)$$

$$E_1 = (0,465 \quad 0,295 \quad 0,24)$$

3.c. $E_3 = E_0 M^3$

En utilisant la calculatrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0,352 & 0,344 & 0,304 \\ 0,312 & 0,352 & 0,336 \\ 0,336 & 0,304 & 0,36 \end{pmatrix} \quad E_0 = (0,1 \quad 0,85 \quad 0,05)$$

$$E_3 = (0,3172 \quad 0,3488 \quad 0,334)$$

Donc au bout de trois semaines

32 % des abonnés sont en Pilates

35 % des abonnés sont en Step.

33 % des abonnés sont en Zumba.

4. $E_6 = E_0 M^6$

$$M^6 = \begin{pmatrix} 0,33338 & 0,33459 & 0,33203 \\ 0,33254 & 0,33338 & 0,33408 \\ 0,33408 & 0,33203 & 0,33389 \end{pmatrix} \quad E_0 = (0,1 \quad 0,85 \quad 0,05)$$

$$E_6 = (0,3327 \quad 0,33343 \quad 0,33387)$$

En arrondissant à 10^{-3}

$$E_6 = (0,333 \quad 0,333 \quad 0,334)$$

A 10^{-3} près, **on peut affirmer qu'au bout de 6 semaines environ $\frac{1}{3}$ des abonnés se répartissent dans chaque activité.**

5. $E_8 = E_0 M^8$

$$M^8 = \begin{pmatrix} 0,33325 & 0,33326 & 0,33349 \\ 0,33344 & 0,33325 & 0,33331 \\ 0,33331 & 0,33349 & 0,33321 \end{pmatrix} \quad E_0 = (0,1 \quad 0,85 \quad 0,05)$$

$$E_8 = (0,33342 \quad 0,33326 \quad 0,33332)$$

Le nombre d'abonnés dans cte salle de sport au 1^{er} septembre est 120.

Le nombre d'abonnés que l'on peut prévoir en Pilates la huitième semaine est :

$$0,33342 \times 120 = 40,0104 = \mathbf{40 \text{ à l'unité près}}$$

En Step

$$0,33326 \times 120 = 39,9912 = \mathbf{40 \text{ à l'unité près}}$$

En Zumba

$$0,33321 \times 120 = 39,984 = \mathbf{40 \text{ à l'unité près}}$$

6.a. On peut conjecturer que tous les coefficients de E, correspondant à l'état stable, sont égaux à $\frac{1}{3}$.

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

6.b. On vérifie que $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ et que $EM = E$

$$EM = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$EM = \left(0,3 \times \frac{1}{3} + 0,5 \times \frac{1}{3} + 0,2 \times \frac{1}{3} \quad 0,1 \times \frac{1}{3} + 0,3 \times \frac{1}{3} + 0,6 \times \frac{1}{3} \quad 0,2 \times \frac{1}{3} + 0,6 \times \frac{1}{3} + 0,2 \times \frac{1}{3} \right)$$

$$EM = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = E$$