

Exercice 4

6 points

Une association confectionne et porte, chaque jour, à domicile des repas à des personnes dépendantes. En 2015, 600 Personnes étaient abonnées à ce service.

Pour étudier son développement, cette association a fait une enquête selon laquelle l'évolution peut être modélisée de la façon suivante :

- . Chaque année, 5 % des abonnements ne sont pas renouvelés.
- . Chaque année, on compte 80 nouveaux abonnement à ce service.

1. Pour suivre l'évolution du nombre d'abonnés, un gestionnaire réalise l'algorithme suivant :

Variables : n et U sont des nombres
Traitement : Affecter à U la valeur 600
 Affecter à n la valeur 0
 Tant que U < 800 faire
 U prend la valeur U-Ux0,05+80
 n prend la valeur n+1
 Fin Tant que
Sortie : Afficher n

1.a. Recopier puis compléter, en le prolongeant avec autant de colonnes que nécessaire, le tableau ci-dessous (arrondir les valeurs calculées à l'unité).

Valeur de U	600																		
Valeur de n	0																		
Test U < 800	vrai																		

1.b. Déterminer la valeur affichée en fin d'exécution de l'algorithme.

1.c. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Cette évolution peut s'étudier à l'aide d'une suite (u_n) où u_n est le nombre d'abonnés pendant l'année 2015+n.

On a ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0,95 u_n+80$ et $u_0=600$.

2.a. Donner u_1 et u_2 (arrondir les valeurs à l'unité).

2.b. On introduit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n=v_n-1600$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

Préciser la raison et le premier terme de cette suite.

2.c. En déduire que l'on a, pour entier naturel n :

$$u_n=1600-1000 \times 0,95^n$$

3. La taille des locaux ne permet pas de servir plus de 1000 repas.

Si cette évolution se poursuit au même rythme, l'association devra-t-elle envisager un jour des travaux d'agrandissement ?

CORRECTION

1.a. En utilisant la calculatrice, on obtient :

Valeur de U	600	650	698	743	785	826
Valeur de n	0	1	2	3	4	5
Test $U < 800$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

1.b. La valeur affichée à la fin de l'exécution de l'algorithme est : 5 .

1.c. En $2020=2015+5$ le nombre d'abonnés à l'association sera supérieure à 800 pour la première année.

2.a. $u_1 = 0,95 \times 600 + 80 = 650$

$u_2 = 0,95 \times 650 + 80 = 697,5 = 698$ à l'unité près.

2.b. Pour tout entier naturel n :

$v_n = u_n - 1600$ donc $u_n = v_n + 1600$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 1600 = 0,95(v_n + 1600) - 1520 = 0,95v_n + 1520 - 1520 = 0,95v_n$

$v_0 = u_0 - 1600 = 600 - 1600 = -1000$

Donc (v_n) est la suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme -1000.

2.c. Pour tout entier naturel n

$v_n = v_0 \times q^n = -1000 \times 0,95^n$ et $u_n = v_n + 1600 = 1600 - 1000 \times 0,95^n$.

3. $u_n > 1000 \Leftrightarrow 1600 - 1000 \times 0,95^n > 1000 \Leftrightarrow 1600 - 1000 > 1000 \times 0,95^n \Leftrightarrow \frac{600}{1000} > 0,95^n$

$\Leftrightarrow 0,6 > 0,95^n$

La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(0,6) > \ln(0,95^n) \Leftrightarrow \ln(0,6) > n \times \ln(0,95)$

$0 < 0,95 < 1$ donc $\ln(0,95) < 0$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,6)}{\ln(0,95)} < n$

En utilisant la calculatrice : $\frac{\ln(0,6)}{\ln(0,95)} = 8,956$ à 10^{-3} près

n est un entier naturel

$\Leftrightarrow 10 \leq n$

Conclusion

En $2015+10=2025$ l'association devra envisager un agrandissement.

Remarque

Sur cet exemple, on peut continuer les calculs, en utilisant la calculatrice, de l'algorithme en remplaçant 800 par 1000.

n = 6 865

n = 7 902

n = 8 937

n = 9 970

n = 10 1001