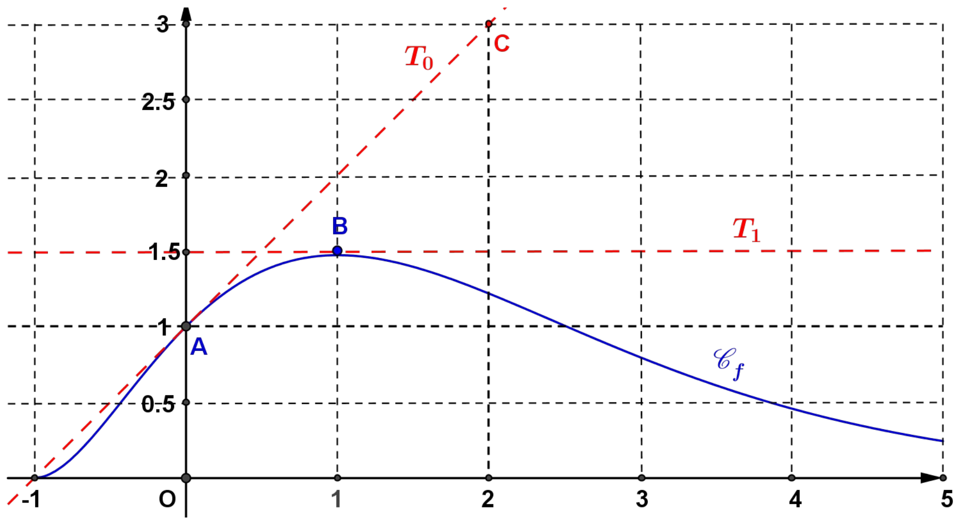
Exercice 1 — 6 points

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [-1;5].
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe le point A(0;1) et par le point B d'abscisse 1.
La tangente T_0 àla courbe au point A passe par le point C(2;3) et la tangente T_1 au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



Partie A

Dans ce questionnaire à choix multiples, aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses est correcte.
Une bonne réponse rapporte 0,75 point.
Une mauvaise réponse ou l'abscence de de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.
Noter sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. La valeur exacte de $f'(1)$ est :
a. 0 **b.** 1 **c.** 1,6 **d.** autre réponse

2. La valeur exacte de $f'(0)$ est :
a. 0 **b.** 1 **c.** 1,6 **d.** autre réponse

3. la valeur exacte de $f(1)$ est :
a. 0 **b.** 1 **c.** 1,6 **d.** autre réponse

4. Un encadrement de $\int_0^2 f(x)\,dx$ pardes entiers naturels successifs est

a. $3 \leqslant \int_0^2 f(x)\,dx \leqslant 4$ **b.** $2 \leqslant \int_0^2 f(x)\,dx \leqslant 3$

c. $1 \leqslant \int_0^2 f(x)\,dx \leqslant 2$ **d.** autre réponse

Partie B

1. On admet que la fonction F définie sur [-1;5] par $F(x)=-(x^2+4x+5)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f

1.a. En déduire l'expression de f(x) sur[-1;5].
1.b. Calculer en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=1.

2. Montrer que sur l'intervalle [1;5], l'équation f(x)=1 admet au moins une solution.

CORRECTION

Partie A

1. **Réponse : a** **0**

Justification non demandée

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T_1 à la courbe représentative de f en B.
T_1 est une droite parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(x)=0$.

2. **Réponse : b** **1**

Justification non demandée

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente T_0 à la courbe représentative de f en A.
T_0 est la droite (AC). A(0;1) C(2;3)

$$f'(0)=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{3-1}{2-0}=\frac{2}{2}=1$$

3. **Réponse : d** **autre réponse**

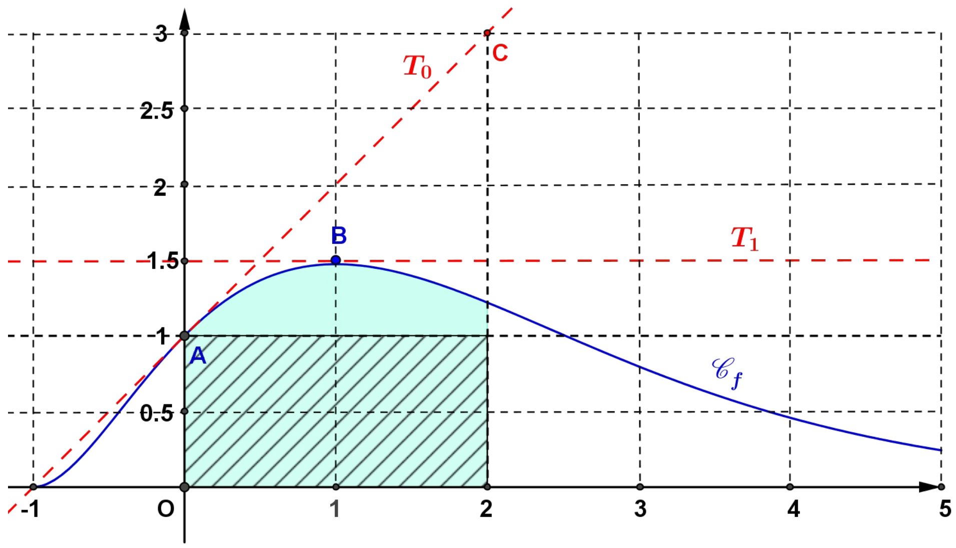
Justification non demandée

Par lecture gaphique on obtient $f(1)=1{,}5$ et non 1,6.

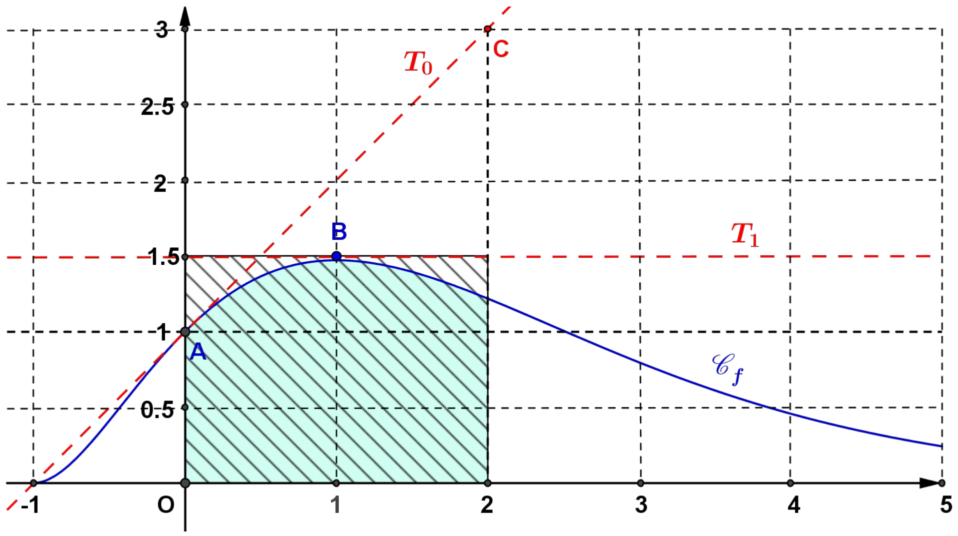
4. **Réponse : b** $2\leqslant \int_0^2 f(x)\,dx \leqslant 3$

Justification non demandée

f est continue et positive sur [0;2] donc $\int_0^2 f(x)\,dx$ est l'aire , en unité d'aire, de la partie de plan comprise la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=2 (colorée en bleu sur les figures suivantes).



L'unité d'aire est l'aire d'un carré de côté l'unité de longueur.
La partie colorée en bleu contient un rectangle constitué de 2 carrés d'aire 2 U.A.



La partie colorée en bleu est contenue dans un rectangle de base 2 et de hauteur 1,5 donc d'aire 3 U.A.

Conclusion

$$2 \leqslant \int_0^2 f(x)\,dx \leqslant 3$$

Partie B

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-1;5] : $F(x)=-(x^2+4x+5)e^{-x}$.

1.a. F est une primitive de f sur [-1;5] donc $F'(x)=f(x)$

$-(x^2\times 4x+5)'=-2x-4 \qquad (e^{-x})'=-e^x$

On dérive un produit

$F'(x)=(-2x-4)e^{-x}-(x^2+4x+5)(-e^{-x})=(-2x-4)e^{-x}+(x^2+4x+5)e^{-x}=(x^2+2x+1)e^{-x}$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-1;5] : $f(x)=(x^2+2x+1)e^{-1}$

1.b. f est continue est positive sur [0;2] donc l'aire, en unité d'aire, du domaine plan compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=o et x=2 est : $\int_0^2 f(x)\,dx$.

$\int_0^2 f(x)\,dx$ = F(2) – F(0)= $9e^{-2}-1e^0=9e^{-2}-1$ U.A.

2. $f(1)=4e^{-1}=1{,}47$ à 10^{-2} près donc $f(1)>1$

$f(5)=36e^{-5}=0{,}24$ à 10^{-2} près donc $f(5)<1$.

f est continue sur [1;5] donc le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que **l'équation f(x)=1 admet au moins une solution dans l'intervalle [1;5].**

Remarque

Pour affirmer que cette équation admet une solution unique appartenant à l'intervalle [1;5], il faut vérifier (par le calcul) que la fonction f est strictement décroissante dans cet intervalle.