Exercice 2 6 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.
Dans ce qui suit, les résultats approchés sont à arrondir au millième.
Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique.

Partie A

On prélève au hasard 100 clés USB dans la production de la journée pour vérification. La production est assez grande pour assimiler ce prélévement à un tirage avec remise de 100 clés.
On admet que la probabilité qu'une clé USB prélevé au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est égale à 0,015.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélévement ainsi défini, associe le nombre de clés défectueuses de ce prélévement.

1. Justifier que la variable aléatoire X soit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer les probabilités $P(X=0)$ et $P(X=1)$.

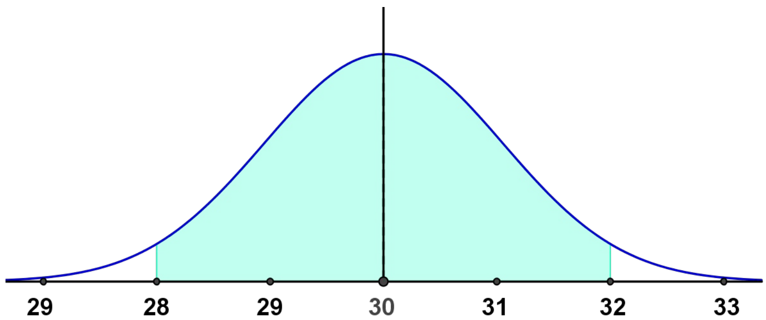
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélévement, au plus deux clés soient défecueuses.

Partie B

Une clé est dite conforme pour la lecture lorsque sa vitesse de lecture, exprimée en Mo/s appartient à l'intervalle [98;103]. Une clé est dite conforme pour l'écriture lorsque sa vitesse d'écriture exprimée en Mo/s appartient à l'ntervalle [28;38].

1. On note R la variable aléatoire qui, à chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse de lecture. On suppose que la variable aléatoire R suit la loi normale d'espérance $\mu=100$ et d'écart-type $\sigma=1$.
Calculer la probabilité qu'une clé soit conforme pour la lecture.

2. On note W la variable aléatoire qui, à chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse d'écriture. On suppose que la variable aléatoire W suit une loi normale.
Le graphique ci-après représente la densité de probabilité de la variable aléatoire W.



L'unité d'aire est choisie de façon àce que l'aire sous la courbe soit égale à un et l'aire de la partie de plan colorée en bleu est environ égale à 0,95 unité d'aire. La droite d'équation $x=30$ est un axe de symétrie de la courbe.
Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire W. Justifier.

Partie C

Dans cette partie, on considère une grande quantité de clés devant être livrées à un éditeur de logiciels. On considère un échantillon de 100 clés prélevées au hasard dans cette livraison. La livraison est assez importante

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.
On constate que 94 clés sont sans défaut.
Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la production des clés USB qui sont sans défaut.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

1. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On tire au hasard une clé USB dans la production de la journée.
Succès : D « la clé est défectueuse ».
La probabilité de succès est égale à P(D)=0,015.
Echec : $\bar{D}$ « la clé n'est pas défectueuse »
La probabilité de l'échec est égale à $P(\bar{D})=1-0,015=0,985$
On considère que l »on effectue des tirages successifs avec remise, c'est à dire que les tirages sont indépendants. La loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre de succès en 100 épreuves est la loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0,015$.

2. $P(X=0)=0,985^{100}$ = **0,221** à 10^{-3} près.
$P(X=1)=100\times 0,015\times 0,985^{99}$ = **0,336** à 10^{-3} près.
(remarque : on peut utiliser la calculatrice pour obtenir les résultats)

3. $P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$
$P(X=2)=\frac{100\times 99}{2}\times 0,015^2\times 0,985^{98}=0,253$ à 10^{-3} près
$P(X\leqslant 2)=0,221+0,336+0,253$ = **0,810** à 10^{-3} près.

Partie B

1. En utilisant la calculatrice
$P(98\leqslant R\leqslant 102)$ = **0,976**

2. Le cours nous indique que si la variable X suit la loi normale d'espèrance μ et d'écart-type σ alors $P(\mu-2\sigma;\mu+2\sigma)=0,95$.
La droite d'équation $x=30$ est un axe de symétrie de la courbe de densité de probabilité de W donc l'espérance de W est μ=30.
On a : $P(28\leqslant W\leqslant 32)=0,95$ soit $P(30-2\times 1\leqslant W\leqslant 30+2\times 1)=0,95$
Conséquence
σ = **1**

Partie C

La proportion observée dans l'échantillon de 100 clés est $\frac{94}{100}=0,94$.
$n=100\geqslant 30$ $\quad np=0,94\times 100=94\geqslant 5$ $\quad n\times(1-p)=100\times 0,06=6\geqslant 5$
Le nombre de clés est $n=100$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{100}}=\frac{1}{10}=0,1$
0,94-0,1=0,84 et 0,94+0,1=1,04 >1
On obtient pour intervalle de confiance **I={0,84;1]**

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés