Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'eseignement de spécialité 5 points

Le 1^{er} septembre 2015, un ensemble scolaire compte 3000 élèves.
Une étude statistique interne a montré que chaque 1^{er} septembre :
. 10 % de l'effectif quitte l'établissement ;
. 250 nouveaux élèves s'inscrivent.
On cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'élèves le 1^{er} septembre de l'année $2015+n$.

1. Justifier qu'on peut modéliser la situation avec la suite (u_n) telle que $u_0=3000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0,9u_n+250$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=u_n-2500$
2.a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9. Préciser v_0 .
2.b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n=500\times 0,9^n+2500$.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=-50\times 0,9^n$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

4. La capacité optimale d'accueil est de 2800 élèves. Ainsi, au 1^{er} septembre 2015, l'ensemble scolaire compte un sureffectif de 200 élèves.
Ecrire un algorithme permettant de déterminer à partir de quelle année, le contexe restant le même, l'ensemble scolaire ne sera plus en sureffectif.

CORRECTION

1. Pour tout entier naturel n, u_n est le nombre d'éléves de l'établissement scolaire au 1^{er} septembre 2015+n et u_{n+1} est le nombre d'élèves au 1^{er} septembre 2015+n+1.

Chaque année :

. 10 % de l'effectif quitte l'établissement

. 250 nouveaux élèves s'inscrivent.

Le nombre d'élèves au 1^{er} septembre 2015+(n+1) est égal au nombre d'élèves au 1^{er} semptembre 2015+n diminué de 10 % de ce nombre et augmenté de 250.

Soit $u_{n+1}=u_n-\frac{10}{100}u_n+250=0{,}9u_n+250$ et $u_0=3000$ nombre d'élèves au 1^{er} septembre 2015.

2. Pour tout entier naturel n

$v_n=u_n-2500$ donc $u_n=v_n+2500$

2.a. $v_{n+1}=u_{n+1}-2500=0{,}9u_n+250-2500=0{,}9(v_n+2500)-2250=0{,}9v_n+2250-2250$

$v_{n+1}=0{,}9v_n$ et $v_0=u_0-2500=3000-2500=500$

(v_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme $v_0=500$ et de raison q=0,9.

2.b. Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0\times q^n=500\times 0{,}9^n$ et $u_n=500\times 0{,}9^n+2500$.

3. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1}=500\times 0{,}9^{n+1}+2500$

$u_n=500\times 0{,}9^n+2500$

$u_{n+1}-u_n=500\times 0{,}9^{n+1}-500\times 0{,}9^n=500\times 0{,}9^n(0{,}9-1)=500\times 0{,}9^n\times(-0{,}1)=-50\times 0{,}9^n<0$

donc la suite (u_n) est décroissante.

4.

Variables :	**N est un entier naturel**
	U est un nombre réels
Initialisation :	**Affecter à N la valeur 0**
	Affecter à U la valeur 3000
Traitement :	**Tant que U < 2800**
	Affecter à U la valeur 0,9U+250
	Affecter à N la valeur N+1
	Fin Tant que
Sortie :	**Afficher ; 2015+N**

En utililisant la calculatrice onobtient :

n = 0	3000
n = 1	2950
n = 2	2905
n = 3	2864
n = 4	2828
n = 5	2795

en 2015+5 = 2020 l'établissement ne sera plus en sureffectif pour la première année.