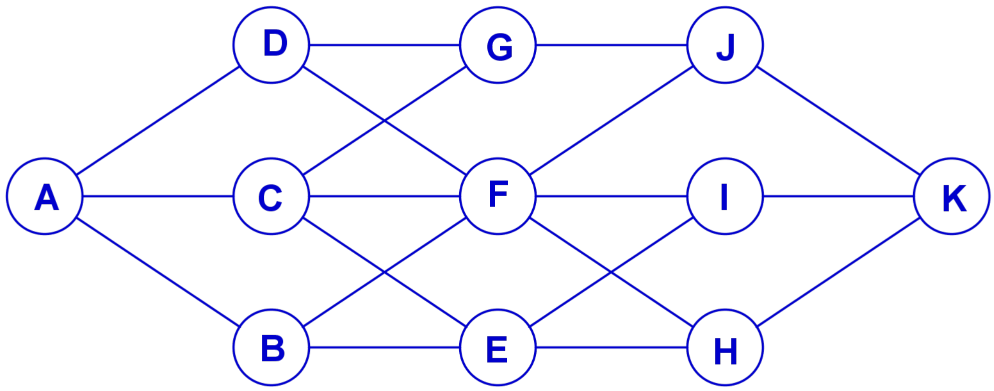
Exercice 3 Candidats ayant suivi l'eseignement de spécialité 5 points

Partie A

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous



1. En justifiant la réponse, dire si ce graphe admet une chaîne eulérienne.
Si oui donner une telle chaîne.

2. On considère la matrice M ci-après (a, b, c et d sont des nombres réels).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.a. Déterminer les réels a, b, c et d pour que la matrice M représente la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$, les sommets étant pris dans l'ordre alohabétique.

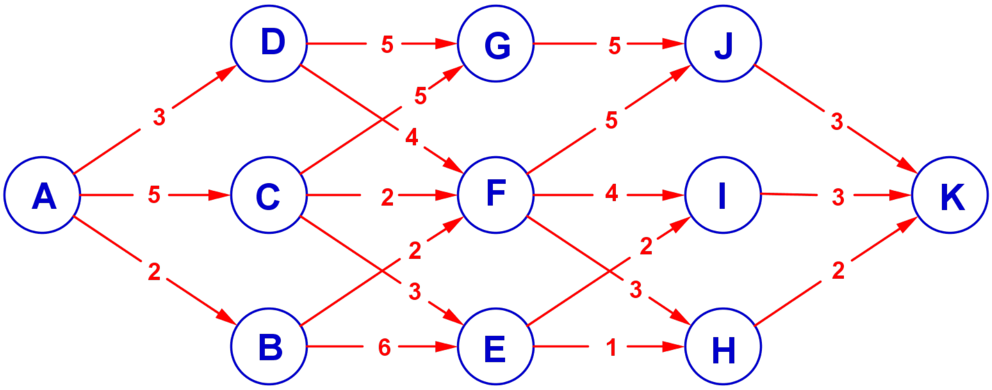
2.b. On donne

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 6 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 11 & 16 & 9 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 8 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 11 & 7 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & 16 & 12 & 0 & 0 & 0 & 13 & 13 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 7 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à J . Préciser ces chemins.

Partie B

On oriente et on pondère le graphe $\mathcal{G}$ pour qu'il représente un réseau d'irrigation.



. Le sommet A correspond au départ d'eau, le sommet K au bassin d'infiltration et les autres sommets représentent les stations de régulation.
. Les arêtes représentent les canaux d'irrigationet les flêches, le sens du ruissellement.
. La pondération donne, en km, les distances entre les différentes stations du réseau.

Déterminer un chemin de longueur minimale entre le départ d'eau en A et le bassin d'infiltration en K et donner sa longueur.

CORRECTION

1. **Théorème d'Euler**

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degrés impairs est 0 ou 2.

On détermine le degré de chaque sommet du graphe $\mathcal{G}$.

On donne le résultat sous la forme d'un tableau.

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Degrés	3	3	4	3	4	6	3	3	3	3	3

Il y a 8 sommets de degrés impairs.

Conclusion

Le graphe $\mathcal{G}$ n'admet pas de chaîne eulérienne.

2. Les sommets sont classés dans l'ordre alphabétique.

M est la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$.

2.a. M est une matrice carrée 11×11.

m_{ij} i ligne j ligne

$m_{ij} = 1$ s'il existe une arête reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet sinon $m_{ij} = 0$.

$a = m_{34}$ 3 ; C 4 : D

Il n'existe pas d'arête reliant C et D donc **a = 0.**

$b = m_{47}$ 4 : D 7 : G

Il existe une arçte reliant D et G donc **b = 1.**

$c = m_{95}$ 9 : I 5 : E

Il existe une arête reliant I et E donc **c = 1.**

$d = m_{115}$ 11 : K 5 : E

Il n'existe pas d'arête reliant K et E donc **d = 0 .**

On donne la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.b. On note m'_{ij} les coefficients de M^3.

m'_{ij} est égal au nombre de chaînes de longueur 3 reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet.

A : 1 J : 10

$m'_{110} = 5$.

Il ya a 5 chaînes de longueur 3 reliant A et J.

A-B-F-J

A-C-F-J

A-C-G-J

A-D-G-J

A-D-F-J

3. On utilise l'algorithme de Dijkstra

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(E)	2(A)	5(A)	3(A)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	2(A)	5(A)	3(A)	8(B)	4(B)	∞	∞	∞	∞	∞
		5(A)	3(A)	8(B)	4(B)	8(D)	∞	∞	∞	∞
		5(A)		8(B)	4(B)	8(D)	7(F)	8(F)	9(F)	∞
		5(A)		8(B)		8(D)	7(F)	8(F)	9(F)	∞
				8(B)		8(D)	7(F)	8(F)	9(F)	9(H)
				8(B)		8(D)		8(F)	9(F)	9(H)
						8(D)		8(F)	9(F)	9(H)
								8(F)	9(F)	9(H)
									9(F)	9(H)
										9(H)

La longueur minmale d'un chemin entre le départ d'eau en A et le bassin d'infiltration en K est de 9 km. Exemple de plus court chemin reliant A à K : A-B-F-H-K.

