Exercice 2 6 points

Un frabricant produit des pneus de deux catégories, la catégorie « pneu neige » et la catégorie « pneu classique ». Sur chacun d'eux on effectue des tests de qualité pour améliorer la sécurité.
On dispose des informations suivantes sur le stock de production :
. le stock contient 40 % de pneu neige ;
. parmi les pneus neige, 92 % ont réussi les tests de qualité ;
. parmi les pneus classiques, 96 % ont réussi les tests de qualité.
Un client choisi un pneu au hasard dans le stock de production. On note :
. N l'événement : « le pneu choisi est un pneu neige » ;
. C l'événement : « le pneu choisi est un pneu classique » ;
. Q l'événement : « le pneu choisi a réussi les tests de qualité ».

Rappel des notations
Si A et B sont deux événements, P(A) désigne la probabilité que l'événement A se réalise et $P_B(A)$ désigne la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé. On notera aussi $\bar{A}$ l'événement contraire de A.

Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.
Dans la suite de l'exercice les résultats seront arrondis au millième.

Partie A

1. Illustrer la situation à l'aide d'un arbre pondéré
2. Calculer la probabilité de l'événement $N \cap Q$ et interpréter ce résultat par une phrase.
3. Montrer que $P(Q)=0{,}944$
4. Sachant que le pneu choisi a réussi les tests de qualité, quelle est la probabilité que ce pneu soit un pneu neige ?

Partie B

On appelle durée de vie d'un pneu la distance parcourue avant d'atteindre le témoin d'usure.
On note X la variable aléatoire qui associe à chaque pneu classique sa durée de vie, exprimée en milliers de kilomètres. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu=30$ er d'écart-type $\sigma=8$.

1. Quelle est la probabilité qu'un pneu classique ait une durée de vie inférieure à 25 milliers de kilomètres.
2. Déterminer la valeur du nombre d pour que, en probabilité, 20 % des pneus classiques aient une durée de vie supérieure à d kilomètres.

Partie C

Une enquête de satisfaction effectuée l'an dernier a révélé que 85 % des clients étaient saisfaits de la tenue de route des pneus du fabricant. Ce dernier souhaite vérifier si le niveau de satisfaction a été le même cette année. Pour cela , il décide d'interroger un échantillon de 900 clients afin de conclure sur l'hypothèse d'un niveau de satisfaction maintenu.
Parmi les 900 clients interrogés, 735 sont satisfaits de la tenue de route.
Quelle va être la conclusion du directeur avec un niveau de confiance 0,95 ?
Détailler les calculs, la démarche et l'argumentation.

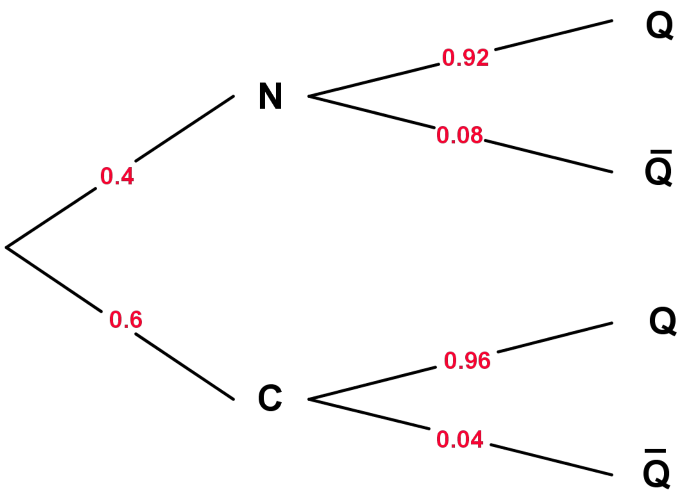
CORRECTION

1. « le stock contient 40 % de pneu neige »
donc $P(N)=0{,}4$ et $C=\bar{N}$ donc $P(C)=1-0{,}4=0{,}6$.

. « parmi les pneus neiges, 92 % ont réussi lestests de qualité »
donc $P_N(Q)=0{,}92$ et $P_N(\bar{Q})=1-0{,}92=0{,}08$.

. « parmi les pneus classiques, 96 % ont réussi les tests de qualité »
donc $P_C(Q)=0{,}96$ et $P_C(\bar{Q})=1-0{,}96=0{,}04$.

. On obtient l'arbre pondéré :



2. $P(N\cap Q)=P(N)\times P_N(Q)=0{,}4\times 0{,}92$ = **0,368.**
La probabilité que le pneu choisi est un pneu neige ayant réussi les tests de qualité est : 0,368.

3. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales.
$P(Q)=P(N\cap Q)+P(C\cap Q)$
$P(C\cap Q)=P(C)\times P_C(Q)=0{,}6\times 0{,}96=0{,}576$
$P(Q)=0{,}368+0{,}576$ = **0,944.**

4. On nous demande de calculer $P_Q(N)$
$P_Q(N)=\dfrac{P(N\cap Q)}{P(Q)}=\dfrac{0{,}368}{0{,}944}$ = **0,390** à 10^{-3} près.

Partie B

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu=30$ et d'écart-type $\sigma=8$.

1. La probabilité qu'un pneu classique ait une durée de vie inférieure à 25 milliers de kilometres est :
$P(X<25)$
En utilisant la calculatrice on obtient : $P(X<25)$ = **0,266.**

2. On nous demande de déterminer la distance d (exprimée en milliers de kilomètres) telle que $P(d<X)=0{,}2$
En utilisant la calculatrice on obtient : **d = 36,733.**

Partie C

Le directeur suppose que la proportion de clients satisfaits par la tenue de route est : 0,85.
La taille de l'échantillon choisi (au hasard) est : n=900.
$n=900\geqslant 30$ $np=900\times 0{,}85=765\geqslant 5$ $n(1-p)=900\times 0{,}15=125\geqslant 5$.
On obtient pour intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %:

$$I=\left[0,85-1,96\times\sqrt{\frac{0,85\times 0,15}{900}};0,85+1,96\times\sqrt{\frac{0,85\times 0,15}{900}}\right]$$

$1,96\times\sqrt{\frac{0,85\times 0,15}{900}}=0,023$ à 10^{-3} près.

$I=[0,85-0,023;0,85+0,023]$

$I=[0,827;0,873]$

La proportion de clients satisfaits de la tenue de route, constatée dans l'échantillon est :

$\frac{735}{900}=0,817$ à 10^{-3} près.

0,817 n'appartient pas à l'intervalle I.

Au seuil de 95 % de confiance, le directeur ne doit pas supposer que la proportion de clients satisfaits de la tenue de route cette année est de 85 %.