Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'ensegnement de spécialité 5 points

Un site internet propose à ses abonnés des films à télécharger. Lors de son ouverture, 500 films sont proposés et chaque mois, le nombre de films proposés au abonnés augmente de 6 %.

Partie A

On modélise le nombre de films proposés par une suite géométrique (u_n) où n désigne le nombre de mois depuis l'ouverture du site. On a donc $u_0=500$.

1. Calculer u_1 et u_2 et donner le résultat arrondi à l'unité.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie B

Dans cette partie, on souhaite déterminer à partir de combien de mois le site aura doublé le nombre de films proposés par rapport au nombre de films proposés à l'ouverture.

1. On veut déterminer cette valeur par un algorithme. Recopier et compléter les lignes L3, L5 et L7 pour que l'algorithme donne le résultat attendu.

L1	**Initialisation :**	Affecter à U la valeur 500
L2		Affecter à N la valeue 0
L3	**Traitement :**	Tant que U . . .
L4		Affecter à N la valeur N+1
L5		Affecter à U la valeur . . .
L6		Fin Tant que
L7	**Sortie**	Afficher . . .

2. On veut maintenant utiliser une méthode algébrique.
Calculer le nombre de mois recherché.

Partie C

En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement est 15000. Sur la base des premiers mois on estime que le nombre des clients abonnés au site évolue suivant la règle suivante.
Chaque mois 10 % des clients se désabonnent et 2500 nouveaux abonnés sont enregistrés.
On note v_n l'estimation du nombre d'abonnés n mois après l'ouverture, on a ainsi $v_0=15000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1}=0{,}9v_n+2500$.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n=v_n-25000$.
2.a. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,9 et préciser son premier terme.
2.b. En déduire que, pour tout entier n, $v_n=25000-10000\times0{,}9^n$.
2.c. Peut-on prévoir, à l'aide de ce modèle une stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme ? Justifier la réponse.

CORRECTION

Partie A

1. u_1 est le nombre de films proposés aux abonnés au bout d'un mois
u_1 est égal au nombre de films proposés à l'ouverture augmenté de 6 % du nombre des films proposés à l'ouverture.

$u_1 = 500 + 500 \times \frac{6}{100} =$ **530**

. u_2 est le nombre de films proposés au bout de deux mois
u_2 est égal au nombre de films proposés au bout d'un mois augmenté de 6 % du nombre des films proposés au bout d'un mois.
$u_2 = 530 + 31{,}8 = 561{,}8$
On arrondit à l'unité
$u_2 =$ **562**

2. u_{n+1} est le nombre de films proposés aux abonnés au bout de n+1 mois
u_{n+1} est « gal au nombre de films proposés au bout de n mois augmenté de 6 % du nombre des films proposés au bout de n mois.

$u_{n+1} = u_n + u_n \times \frac{6}{100} = \left(1 + \frac{6}{100}\right) u_n = 1{,}06\, u_n$

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $q = 1{,}06$.
Donc pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 500 \times 1{,}06^n$.

3. $1{,}06 > 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} 1{,}06^n = +\infty$
et $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Partie B

1. Algorithme complété

L1	**Initiation :**	Affecter à U la valeur 500
L2		Affecter à N la valeur 0
L3	**Traitement :**	Tant que **U < 1000**
L4		Affecter à N la valeur N+1
L5		Affecter à U la valeur **Ux1,06**
L6		Fin Tant que
L7	**Sortie :**	Afficher **N**

2. On veut déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $u_n \geqslant 2 \times u_0$.
$500 \times 1{,}06^n \geqslant 1000 \Leftrightarrow 1{,}06^n \geqslant 2$
ln est croissante sur $]0;+\infty[$
$\Leftrightarrow \ln(1{,}06^n) \geqslant \ln(2) \Leftrightarrow n \times \ln(1{,}06) \geqslant \ln(2)$
$1{,}06 > 1$ donc $\ln(1{,}06) > 0$
$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}06)}$
$\frac{\ln(2)}{\ln(1{,}06)} = 11{,}90$ à 10^{-2} près
<u>Conclusion</u>
Le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 1000$ est : **12.**

Partie C

1. Pour tout entier naturel n :

v_{n+1} est le nombre d'abonnés au mois $n+1$

v_{n+1} est égal au nombre d'abonnés au mois n diminué de 10 % du nombre d'abonnés aumois n et augmenté de 2500.

$$v_{n+1}=v_n-\frac{10}{100}\times v_n+2500=\left(1-\frac{10}{100}\right)v_n+2500=0{,}9\,v_n+2500$$

2. Pour tout entier naturel n :

$w_n=v_n-25000$ donc $v_n=w_n+25000$

2.a. Pour tout entier naturel n :

$w_{n+1}=v_{n+1}-25000=0{,}9\,v_n+2500-25000=0{,}9(w_n+25000)-22500=0{,}9\,w_n+22500-22500=0{,}9\,v_n$

(w_n) est la suite géométrique de raison $q=0{,}9$ et de premier terme $w_0=u_0-25000=15000-25000$ $=-10000$

2.b. Pour tout entier naturel n :

$w_n=w_0\times q^n=-10000\times 0{,}9^n$ et $v_n=w_n+25000=25000-10000\times 0{,}9^n$

2.c. $0\leqslant 0{,}9<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n=0$

<u>Conséquence</u>

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=25000.$

Dans un avenir lointain le nombre d'abonnés sera voisin de 25000.