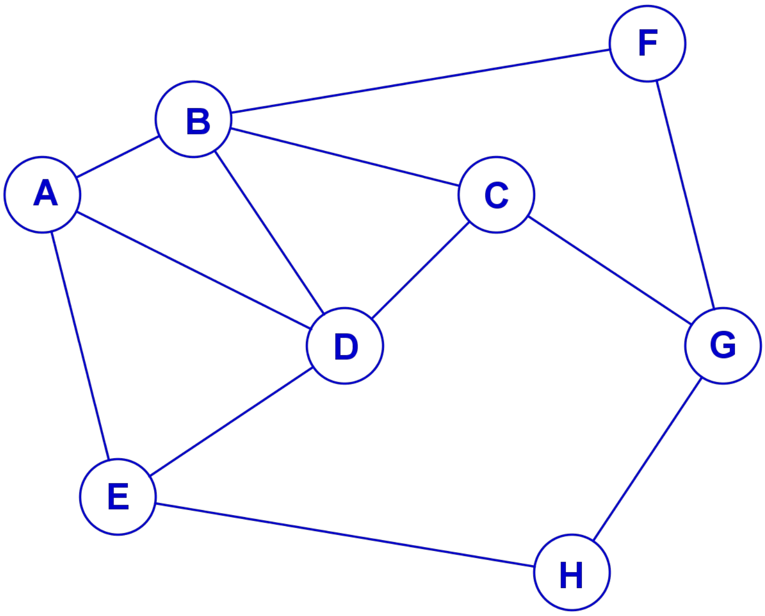
Exercice 3 Candidats ayant suivi l'ensegnement de spécialité 5 points

Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H.
Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens.Cette situation est représentée par le graphe Γ ci dessous, dans lequel
. les sommets représentent les aéroports
. les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.



Partie A

1.a. Déterminer,en justifiant, si le graphe Γ est complet.
1.b. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est connexe.

2. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui , donner une telle chaîne.

3. Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ en respectant l'ordre alphabétique des sommets du graphe.

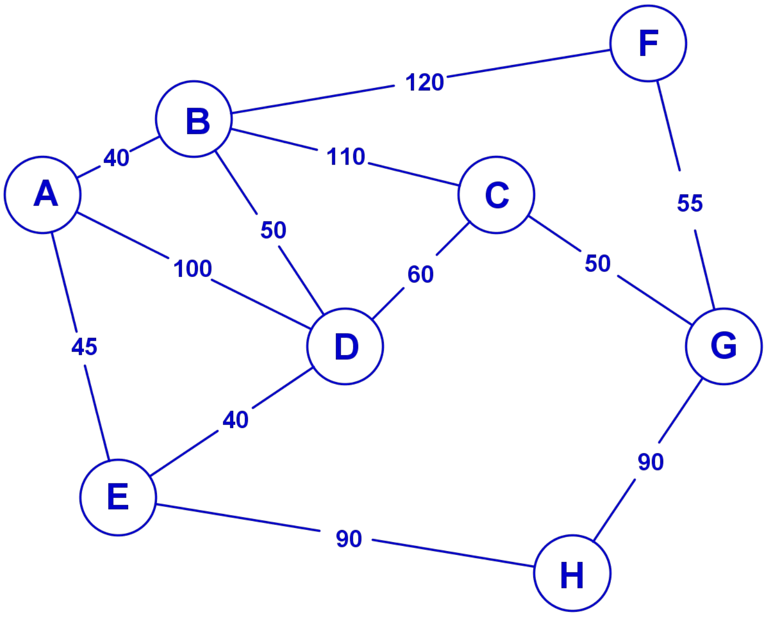
4. Pour la suite de l'exercice, on donne les matrices suivantes :

$$M^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M^3=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 8 & 8 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 7 & 6 & 7 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Un voyageur souhaite aller de l'aéroport B à l'aéroport H.
4.a. Déterminer le nombre minimal de vols qu'il doit prendre. Justifier les réponses à l'aide des matrices données ci-dessus.
4.b. Donner tous les trajets possibles en prenant trois vols successifs.

Partie B

Les arêtes sont maintenant pondérées par le coût de chaque vol exprimé en euros.



Un voyageur partant de l'aéroport A doit se rendre à l'aéroport G.
En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet le moins cher.

CORRECTION

1.a. Le graphe Γ **n'est pas complet** car, par exemple, les sommets D et H ne sont pas reliés par une arête.

1.b. Le graphe Γ **est connexe** car toutes les paires de sommets sont reliées par au moins une chaîne.

2. Théorème d'Euler
Un graphe connexe admet aumoins une chaîne eulérienne si et seulement le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

.

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
degrés	3	4	3	4	3	2	3	2

Il y a quatre sommets de degré impair donc le graphe Γ **n'admet pas de chaîne eulérienne.**

3. Les sommets du graphe Γ sont placés dans l'ordre alphabétique.
La matrice d'adjacence du graphe Γ est la matrice $M=(m_{ij})$ $1\leqslant i\leqslant 8$ et $1\leqslant j\leqslant 8$.
$m_{ij}=1$ s'il existe une arête reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet sinon $m_{ij}=0$.

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

4.a. Il n'existe pas d'arête reliant B à H.
Le nombre de chaînes de longueur 2 reliant B à H est 0 (coefficient de la matrice M^2 deuxième ligne et dernière colonne) donc il n'existe pas de chaîne de longueur 2 reliant B à H.
Le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B à H est 4 (coefficient de la matrice M^3 deuxième ligne et dernière colonne) donc il existe des chaînes de longueur 3 reliant B à H.
Conclusion
Le nombre minimal de vols que doit prendre le voyageur pour se rendre de B à H est 3.

4.b. Les quatre trajets possibles de B vers H empruntant trois vols sont :
B-A-E-H
B-D-E-H
B-C-G-H
B-F-G-H

Partie B

On utilise l'algorithme de Dijkstra pour obtenir un chemin le plus court

A	B	C	D	E	F	G	H
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	40'A)	∞	100(A)	45(A)	∞	∞	∞
	40(A)	150(B)	90(B)	45(A)	160(B)	∞	∞
		150(B)	85(E)	45(A)	160(B)	∞	135(E)
		145(D)	85(E)		160(B)	∞	135(E)
		145(B)			160(B)	195(c)	135(E)
		145(B)			160(B)	195(C)	
					160(B)	195(c)	
						195(C)	

Le trajet le moins cher pour aller de A à G coûte **195€.**
On obtient pour trajet ; **A-E-D-C-G.**