## Exercice 4 5 points

**Partie A**

Soit f la fonction définie sur [0;8] par : $f(x)=\frac{0,4}{20e^{-x}+1}+0,4$.

**1.** Montrer que $f'(x)=\frac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}$ où $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction f.

**2.** Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

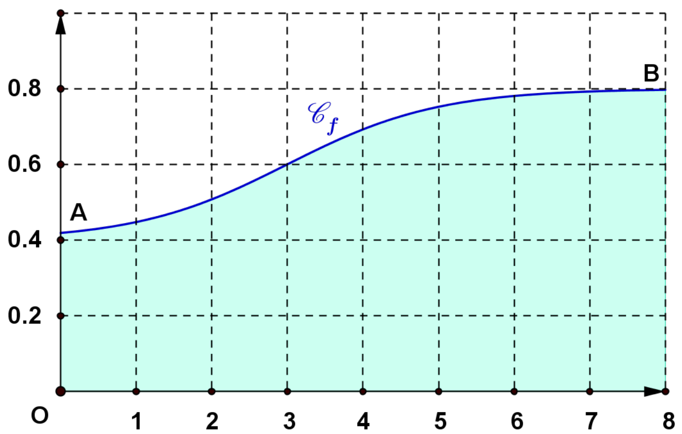
| | |
|---|---|
| 1 | f'(x):=8*e^(-x)/(20*e^(-x)+1)^2 <br> → f'(x):= $\frac{8.e^{-x}}{400(e^{-x})^2+40e^{-x}+1}$ |
| 2 | g(x):= Dérivée[f'(x)] <br> → g(x) := $\frac{160(e^{-x})^2-8e^{-x}}{8000(e^{-x})^3+1200(e^{-x})^2+60e^{-x}+1}$ |
| 3 | Factoriser [g(x)] <br> → $8e^{-x}.\frac{20e^{-x}-1}{(20e^{-x}+1)^3}$ |

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

**Partie B**

Dans une région montagneuse, une entreprise étudie un projet de route reliant les villages A et B situés à deux altitudes différentes. La fonction f, définie dans la partie A, modélise le profil de ce projet routier. La variable x représente la distance horizontale, en kilomètres, depuis le village A et f(x) représente l'altitude assocée, en kilomètres.

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.




Dans cet exercice, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point M est appelé « pente en M ».

On précise aussi qu'une pente de 5 % correspond à un coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en M est égal à 0,05.

Il est décidé que le projet sera accepté à condition qu'en aucun point de $\mathscr{C}_f$ la pente ne dépasse 12 %.

*Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.*

**Proposition 1**
L'altitude du village B est 0,6 km.

**Proposition 2**
L'écart d'altitude entre les villages A et B est 378 mètres, valeur arrondie au mètre.

**Proposition 3**
La pente en A vaut environ 1,8 %.

**Proposition 4**
Le projet de route ne sera pas accepté.

## CORRECTION

### Partie A

**1.** f est dérivable sur [0;8]

$(e^u)' = u' e^u$ donc $(e^{-x})' = -e^{-x}$ $(0{,}4)' = 0$

On dérive un quotient

$$f'(x) = \frac{-0{,}4 \times (-20e^{-x})}{(20e^{-x}+1)^2} = \frac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}$$

**2.** Le logiciel précise :

$$f''(x) = 8e^{-x} . \frac{20e^{-x}-1}{(20e^{-x}+1)^3}$$

Pour tout nombre réel de l'intervalle [0;8] on a $e^{-x} > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est le signe de $20e^{-x}-1$ .

$$20e^{-x} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geqslant \frac{1}{20}$$

ln est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$

$$\ln(e^{-x}) \geqslant \ln\left(\frac{1}{20}\right) \Leftrightarrow -x \geqslant \ln\left(\frac{1}{20}\right) \Leftrightarrow x \leqslant -\ln\left(\frac{1}{20}\right) = \ln(20)$$

or ln(20)= 3 à $10^{-2}$ près

Conclusion

f est convexe sur l'intervalle [0;ln(20)].

### Partie B

**Proposition 1 :** $\boxed{\textbf{FAUSSE}}$

*Justification*

L'altitude du village B est $f(8) = \frac{0{,}4}{20e^{-8}+1} + 0{,}4 = 0{,}8 \text{ km}$ à $10^{-2}$ près.

**Proposition 2 :** $\boxed{\textbf{VRAIE}}$

*Justification*

$f(8) = 0{,}7973$ à $10^{-4}$ près

$f(0) = \frac{0{,}4}{21} + 0{,}4 = 0{,}4190$ à $10^{-4}$ près

La différence en km d'altitudes des villages A et B est $f(8) - f(0) = 0{,}797 - 0{,}419 = 0{,}378 \text{ km}$

**Soit 378 m.**

**Proposition 3 :** $\boxed{\textbf{VRAIE}}$

*Justification*

Le coefficient directeur dela tangente à $\mathscr{C}_f$ en A est ègal à $f'(0) = \frac{8}{21^2} = 0{,}0181$ à $10^{-4}$ près.

Donc **la pente en A vaut environ 1,8 %**

**Proposition 4 :** $\boxed{\textbf{VRAIE}}$

*Justification*

On donne les variations de la fonction f sous la forme d'un tableau

| x | 0 | | ln(20) | | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| f ''(x) | | + | 0 | – | |
| f '(x) | | ↗ | M | ↘ | |

Le maximum M de $f'$ sur [0;8] est $f'(\ln(20))$

On a : $e^{-\ln(20)}=\dfrac{1}{20}$

$$f'(x)=\frac{8e^{-x}}{400(e^{-x})^2+40e^{-x}+1}$$

$$f'(\ln 20)=\frac{8\times\dfrac{1}{20}}{400\times\left(\dfrac{1}{20}\right)^2+40\times\dfrac{1}{20}+1}=\frac{\dfrac{2}{5}}{1+2+1}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}=0{,}1$$

Le maximum du cefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ d'un point d'abscisse x de l'intervalle [0;8] est 0,1 donc la pente maximale en un point de $\mathscr{C}_f$ est 10 % donc inférieure à 12 %.

**Le projet de route sera accepté.**