

Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.

Le patron de cette entreprise remarque que, chaque année, 12 % de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats résiliés. Il se fonde sur ce constat pour estimer le nombre de contrats annuels à venir.

En 2015, l'entreprise PiscinePlus dénombre 75 contrats souscrits.

On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de contrats souscrits auprès de l'entreprise Piscineplus l'année 2015+n. Ainsi, on a $u_0 = 75$.

1.a. Estimer le nombre de contrats d'entretiens en 2016.

1.b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$.

2. L'entreprise PiscinePlus peut prendre en charge un maximum de 100 contrats avec son nombre actuel de salariés. Au delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel.

On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher. Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

- L1 Variables : n est un nombre entier naturel
- L2 U est un nombre réel
- L3 Traitement : Affecter à n la valeur 0
- L4 Affecter à U la valeur 75
- L5 Tant que $U \leq 100$ faire
- L6 n prend la valeur n+1
- L7 U prend la valeur $1,12U - 6$
- L8 Fin Tant que
- L9 Sortie : Afficher . . .

2.a. Recopier et compléter la ligne L9.

2.b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus ; On arrondira les résultats à l'unité.

Valeur de n	0		
Valeur de U	75		

2.c. Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme pour interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$ et $u_0 = 75$;

On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 50$.

3.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

3.b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 25 \times 1,12^n + 50.$$

3.c. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n > 100$.

3.d. Quel résultat de la question 2 retrouve-t-on ?

CORRECTION

1.a. « Chaque année 12 % de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats sont résiliés »

$$2016 = 2015 + 1 \quad (n = 1)$$

$$\text{donc } u_1 = u_0 + u_0 \times \frac{12}{100} - 6 = 75 + 75 \times \frac{12}{100} - 6 = 75 + 9 - 6 = 78.$$

1.b. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + u_n \times \frac{12}{100} - 6 = u_n + 0,12 u_n - 6 = 1,12 u_n - 6$$

2.a. On cherche à connaître la première année pour laquelle le nombre de contrats est strictement supérieur à 100 donc pour la dernière ligne de l'algorithme on écrit.

L9 Sortie : afficher **2015 + n**

2.b. En utilisant la calculatrice

$$n = 0 \quad u_0 = 75 \leq 100$$

$$n = 1 \quad u_1 = 1,12 \times u_0 - 6 = 78 \leq 100$$

$$n = 2 \quad u_2 = 1,12 u_1 - 6 = 81,36 \leq 100 \quad \text{on prend } 81$$

$$n = 3 \quad u_3 = 1,12 u_2 - 6 = 85,12 \dots \leq 100 \quad \text{on prend } 85$$

$$n = 4 \quad u_4 = 1,12 u_3 - 6 = 89,33 \dots \leq 100 \quad \text{on prend } 89$$

$$n = 5 \quad u_5 = 1,12 u_4 - 6 = 94,05 \dots \leq 100 \quad \text{on prend } 94$$

$$n = 6 \quad u_6 = 1,12 u_5 - 6 = 99,34 \dots \leq 100 \quad \text{on prend } 99$$

$$n = 7 \quad u_7 = 1,12 u_6 - 6 = 105,26 \dots \geq 100 \quad \text{on prend } 105$$

On donne les résultats sous la forme d'un tableau

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeur de U	75	78	81	85	89	94	99	105

2.c. La valeur affichée est : $2015 + 7 = 2022$.

En 2022, le nombre de contrats souscrits sera supérieur à 100, l'entreprise devra embaucher du personnel supplémentaire.

3. $u_0 = 75$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 1,12 u_n - 6$ et $v_n = u_n - 50$ (donc $u_n = v_n + 50$).

3.a. Pour tout entier naturel n

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 50 = 1,12 u_n - 6 - 50 = 1,12 (v_n + 50) - 56 = 1,12 v_n + 56 - 56 = 1,12 v_n$$

$$v_0 = u_0 - 50 = 75 - 50 = 25$$

(v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 25$ et de raison $q = 1,12$.

3.b. Pour tout entier naturel n, on a : $v_n = 25 \times 1,12^n$.

$$\text{Or } u_n = v_n + 50 \quad \text{donc } u_n = 25 \times 1,12^n + 50$$

3.c. $u_n > 100 \Leftrightarrow 25 \times 1,12^n + 50 > 100 \Leftrightarrow 1,12^n > 2$

ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \ln(1,12^n) > \ln(2) \Leftrightarrow n \times \ln(1,12) > \ln(2)$$

$$1,12 > 1 \quad \text{donc } \ln(1,12) > 0$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(2)}{\ln(1,12)} = 6,116 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Donc $n \geq 7$

L'ensemble des solutions de l'inéquation dans l'ensemble des entiers naturels est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égal à 7.

3.d. En $2015 + 7 = 2022$, **le nombre de contrats souscrits est strictement supérieur à 100 pour la première année.**