

Exercice 3 *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité* **5 points**

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.

C'est la seule entreprise dans les environs. Ainsi, les propriétaires de piscines n'ont que deux choix possibles : soit ils s'occupent eux-mêmes de l'entretien de leur piscine, soit ils souscrivent un contrat avec l'entreprise PiscinePlus.

On admet que le nombre de propriétaires de piscines est constant.

Le patron de cette entreprise remarque que chaque année :

- . 12 % des particuliers qui entretenaient eux-mêmes leur piscine décident de souscrire un contrat avec l'entreprise PiscinePlus.
- . 20 % de particuliers sous contrats avec l'entreprise PiscinePlus décident de le résilier pour entretenir eux-mêmes leur piscine.

Cette situation peut-être modélisée par un graphe probabiliste de sommets C et L où :

- . C est l'événement « Le particulier est sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus » ;
- . L est l'événement « Le particulier effectue lui-même l'entretien de sa piscine ».

Chaque année, on choisit au hasard un particulier possédant une piscine et on note pour tout entier naturel n :

- . c_n la probabilité que ce particulier soit sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus l'année 2015+n .
- . l_n la probabilité que ce particulier entretienne lui-même sa piscine l'année 2015+n .

On note $P_n = \begin{pmatrix} c_n & l_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année 2015+n .

Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'entreprise PiscinePlus atteindra l'objectif d'avoir au moins 35 % des propriétaires de piscines comme client sous contrat d'entretien.

Partie A

1. Dessiner le graphe probabiliste représentant cette situation et donner la matrice de transition associée au graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre C et L.
- 2.a. Montrer que l'état stable de ce graphe est $P = (0,375 \quad 0,625)$.
- 2.b. Déterminer, en justifiant, si l'entreprise PiscinePlus peut espérer atteindre son objectif.

Partie B

En 2015, on sait que 15 % des propriétaires de piscines étaient sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus.

On a ainsi $P_0 = (0,15 \quad 0,85)$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12$
2. A l'aide d'un algorithme, on cherche à connaître au bout de combien d'années l'entreprise PiscinePlus atteindra son objectif.

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		C est un nombre réel
L3	Traitement :	Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à C la valeur 0,15
L5		Tant que $C < 0,35$ faire
L6		n prend la valeur n+1
L7		C prend la valeur $0,68C + 0,12$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher n

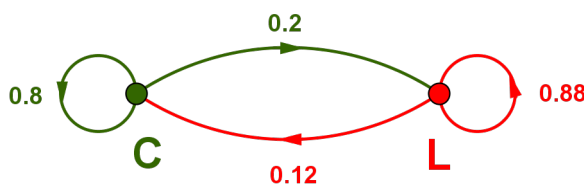
- 2.a. Recopier et compléter le tableau ci-après, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats au millièmes.

Valeur de n	0		
Valeur de C	0.15		

- 2.b. Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
3. On rappelle que, pour tout entier naturel n , on a $c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12$ et que $c_0 = 0,15$.
On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = c_n - 375$.
- 3.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.
On admet que, pour tout entier naturel n , on a $c_n = -0,225 \times 0,68^n + 0,375$.
- 3.b. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels, l'inéquation $c_n \geq 0,35$.
- 3.c. Quel résultat de la question 2, retrouve-t-on ?

CORRECTION

1. Le graphe probabiliste admet deux sommets C et L.
 - « 12 % des particuliers qui entretenaient eux-mêmes leur piscine décident de souscrire un contrat avec l'entreprise PiscinePlus ».
 - Donc 88 % des particuliers qui entretiennent eux-mêmes leur piscine continuent d'entretenir eux-mêmes leur piscine.
 - Le poids de l'arête LC est 0,12.
 - Le poids de l'arête LL est 0,88.
 - « 20 % des particuliers sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus décident de résilier pour entretient eux-mêmes leur piscine ».
 - Donc 80 % des particuliers sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus continuent de souscrire le contrat.
 - Le poids de l'arête CL est 0,2.
 - Le poids de l'arête CC est 0,8.
 - On obtient pour graphe probabiliste :



- L'ordre des sommets est C puis L.
- La matrice de transition M associée au graphe probabiliste est :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

- m_{11} est le poids de l'arête CC : 0,8.
- m_{12} est le poids de l'arête CL : 0,2.
- m_{21} est le poids de l'arête LC : 0,12.
- m_{22} est le poids de l'arête LL : 0,88.

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix}$$

- 2.a. $P = (c \ 1)$ est l'état stable si et seulement si $P = PM$ et $c + 1 = 1$.

$$P = PM \Leftrightarrow (c \ 1) = (c \ 1) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (c \ 1) = (0,8c + 0,121 \quad 0,2c + 0,881)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0,8c + 0,121 \\ 1 = 0,2c + 0,881 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2c = 0,121 \\ 0,121 = 0,2c \end{cases} \Leftrightarrow \{0,2c = 0,121\} \Leftrightarrow \{c = 0,61\}$$

On obtient : $c = 0,61$ et $c + 1 = 1$ donc $0,61 + 1 = 1 \Leftrightarrow 1,61 = 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{1,6} = \frac{10}{16} = 0,625$

et $c = 1 - 1 = 1 - 0,625 = 0,375$.

Conclusion

$$P = (0,375 \quad 0,625)$$

- 2.b. Dans un avenir lointain 37,5 % des particuliers, possédant une piscine, auront souscrit un contrat avec l'entreprise PiscinePlus.
- Or $37,5 > 35$ donc l'entreprise PiscinePlus pourra atteindre son objectif.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} = P_n M \Leftrightarrow (c_{n+1} \ 1_{n+1}) = (c_n \ 1_n) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_{n+1} = 0,8c_n + 0,12l_n \\ l_{n+1} = 0,2c_n + 0,88l_n \end{cases}$$

Or $c_n + l_n = 1$

$$c_{n+1} = 0,8c_n + 0,12(1 - c_n) = 0,8c_n + 0,12 - 0,12c_n = 0,68c_n + 0,12$$

2.a. En utilisant la calculatrice

$n=0 \quad c_0 = 0,15$

$n=1 \quad c_1 = 0,68c_0 + 0,12 = 0,222 < 0,35$

$n=2 \quad c_2 = 0,68c_1 + 0,12 = 0,271 < 0,35$

$n=3 \quad c_3 = 0,68c_2 + 0,12 = 0,304 < 0,35$

$n=4 \quad c_4 = 0,68c_3 + 0,12 = 0,327 < 0,35$

$n=5 \quad c_5 = 0,68c_4 + 0,12 = 0,342 < 0,35$

$n=6 \quad c_6 = 0,68c_5 + 0,12 = 0,353 \geq 0,35$

On donne les résultats sous forme de tableau

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de C	0.35	0.222	0.271	0.304	0.327	0.342	0.353

2.b. La valeur affichée à la fin de l'exécution de l'algorithme est : **6**.

Dans 6 ans l'entreprise PiscinePlus aura réalisé son objectif (c'est à dire en $2015+6=2021$).

3. Pour tout entier naturel n :

$$c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12 \quad (c_0 = 0,15) \quad \text{et} \quad v_n = c_n - 0,375 \quad (\text{donc} \quad c_n = v_n + 0,375)$$

3.a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = c_{n+1} - 0,375 = 0,68c_n + 0,12 - 0,375 = 0,68(v_n + 0,375) - 0,255 = 0,68v_n + 0,255 - 0,255 = 0,68v_n$$

$$v_0 = c_0 - 0,375 = 0,15 - 0,375 = -0,225$$

donc (v_n) est la suite géométrique de raison $q=0,68$ et de premier terme $v_0 = -0,225$.

Pour entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times q^n = -0,225 \times 0,68^n$$

Conséquence

$$c_n = v_n + 0,375 = -0,225 \times 0,68^n + 0,375$$

3.b. $c_n \geq 0,35 \Leftrightarrow -0,225 \times 0,68^n + 0,375 \geq 0,35 \Leftrightarrow 0,375 - 0,35 \geq 0,225 \times 0,68^n \Leftrightarrow \frac{0,025}{0,225} \geq 0,68^n$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9} \geq 0,68^n$$

\ln est une fonction croissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{9}\right) \geq \ln(0,68^n) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{9}\right) \geq n \times \ln(0,68)$$

$0,68 < 1$ donc $\ln(0,68) < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{\ln(0,68)} \leq n \quad \frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{\ln(0,68)} = 05,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

donc **6** \leq **n**.

L'ensemble des solutions de l'inéquation dans l'ensemble des entiers naturels est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égal à 6.

3.b. **On retrouve qu'il faut 6 ans pour que l'entreprise PiscinePlus atteigne son objectif.**