Exercice 4 6 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [3;13] par : $f(x)=-2x+20-e^{-2x+10}$

Partie A : Etude de la fonction f

1. Montrer que la fonction dérivée f', de la fonction f, définie pour tout x de l'intervalle [3;13], a pour expression : $f'(x)=2(-1+e^{-2x+10})$

2.a. Résoudre dans l'intervalle [3;13], l'inéquation : $f'(x)\geqslant 0$

2.b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [3;13] et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Les valeurs du tableau seront, si besoin, arrondies à 10^{-3}.

2.c. Calculer l'intégale $\int_3^{13} f(x)\,dx$

On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie B : Application

Une usine fabrique et commercialise des tobogans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1300. On suppose que toute la production est commercialisable.
Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de tobogans est modéliisé sur l'intervalle [3;13] par la fonction f.
En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer le nombre de tobogans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice, arrondi à l'euro.

2. Calculer le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1300 tobogans. Arrondir le résultat à l'euro.

Partie C : Rentabilité

Pour être rentable, l'usine doit avoir un bénéfice positif.
Déterminer le nombre minimum et le nombre maximum de tobogans que l'usine doit fabriquer en un mois pour qu'elle soit rentable. Justifier la réponse.

CORRECTION

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [3;13], $f(x)=-2x+20-e^{-2x+10}$.

Partie A : Etude de la fonction f

1. f est dérivable sur [3;13]

$(e^u)'=u'e^u$ donc $(e^{-2x+10})'=-2e^{-2x+10}$

et $f'(x)=-2+2e^{-2x+10}=2(-1+e^{-2x+10})$

2.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [3;13]

$f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow -1+e^{-2x+10}\geqslant 0 \Leftrightarrow e^{-2x+10}\geqslant 1$

ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(e^{-2x+10})\geqslant \ln(1) \Leftrightarrow -2x+10\geqslant 0 \Leftrightarrow 10\geqslant 2x \Leftrightarrow 5\geqslant x$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x)\geqslant 0$ dans l'intervalle [3;13]est : [3;5] (et $f'(5)=0$)

2.b. Sur l'intervalle]5;13] on a : $f'(x)<0$.

$f(5)=-10+20-e^0=9$

$f(3)=-6+20-e^4=-40{,}598$ à 10^{-3} près.

$f(13)=-6-e^{-16}=-6$ À 10^{-3} près

<u>Tableau de variations</u>

x	3		5		13
f'(x)		-	0	+	
f(x)	-40.598	↗	9	↘	-6

2.c. Si a est un nombre réel non nul et b est un nombre réel alors une primitive de la fonction g telle que $g(x)=e^{ax+b}$ sur ℝ est G telle que $G(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b}$.

donc $g(x)=e^{-2x+10}$ $G(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x+10}$

F est une primitive de f sur [3;13]

$f(x)=-2x+20-e^{-2x+10}$ et $F(x)=-x^2+20x+\frac{1}{2}e^{-2x+10}$

$\int_3^{13} f(x)\,dx=F(13)-F(3)$

$F(13)=-13^2+20\times 13+\frac{1}{2}e^{-6}=-169+260+\frac{1}{2}e^{-6}=91+\frac{1}{2}e^{-6}$

$F(3)=-9+60+\frac{1}{2}e^4=51+\frac{1}{2}e^4$

$\int_3^{13} f(x)\,dx=91+\frac{1}{2}e^{-6}-51-\frac{1}{2}e^4=40+\frac{1}{2}(e^{-6}-e^4)=12{,}702$ à 10^{-3} près

Partie B : Application

1. L'usine doit produire 5 centaines de tobogans (500 tobogans) pour obtenir un bénéfice maximal et ce béné-fice maximal est égal à 9 milliers d'euros (soit 9000 euros).

2. Le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise 300 et 1300 tobagans est égal à :

$\frac{1}{13-3}\int_3^{13} f(x)\,dx = \frac{1}{10}\int_3^{13} f(x)\,dx = 1{,}270$ en milliers d'euros ;

Soit **1270 euros.**

Partie C : Rentabilité

Il faut résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

. f est continue et strictement croissante sur [3;5] $f(3)<0$ et $f(5)>0$ donc il existe un unique nombre réel α appartenant à l'intervalle [3;5] tel que $f(\alpha)=0$ et on obtient :

Si $3 \leqslant x \leqslant \alpha$ alors $f(x) \leqslant 0$

Si $\alpha \leqslant x \leqslant 5$ alors $f(x) \geqslant 0$

. f est continue et strictement décroissante sur [5;13], $f(5)>0$ et $f(13)<0$ donc il existe un unique nombre réel β appartenant à l'intervalle [5;13] tel que $f(\beta)=0$ et on obtient :

Si $5 \leqslant x \leqslant \beta$ alors $f(x) \geqslant 0$

Si $\beta \leqslant x \leqslant 13$ alors $f(x) \leqslant 0$

x	3	α	5	β	13
f(x)	↗	0	9	0	↘
Signe de f(x)	-	0	+	0	-

. On détermine une valeur approchée d e α et β au centième près avec la calculatrice.

$f(3)=-40{,}598<0$ et $f(4)=4{,}611>0$ donc $3<\alpha<4$

$f(3{,}7)=-0{,}864<0$ et $f(3{,}8)=1{,}377>0$ donc $3{,}7<\alpha<3{,}8$

$f(3{,}73)=-0{,}140<0$ et $f(3{,}74)=0{,}091>0$ donc $3{,}73<\alpha<3{,}74$

α est exprimé en centaines de tobogans.

Il faut donc produire au moins 374 tobogans pour avoir un bénéfice positif.

$f(10)<0$ mais $f(10)=0$ à 10^{-2} près et $f(9{,}99)=0{,}02>0$ donc $9{,}99<\beta<10$.

Il faut donc produire au plus 999 tobogans pour avoir un bénéfice positif.

<u>Conclusion</u>

L'**usine doit produire entre 374 et 999 tobogans pour être rentable.**