Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un loueur de voitures dispose au 1^{er} mars 2015 d'un total de 10000 voitures pour l'Europe.
Afin d'entretenir son parc, il décide de revendre, au 1^{er} mars de chaque année, 25 % de son parc automobile et d'acheter 3000 voitures neuves.
On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile a u 1^{er} mars de l'année (2015+n).
On a donc $u_0=10000$.

1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0,75u_n+3000$.

2. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n=u_n-12000$.
2.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser son premier terme.
2.b. Exprimer v_n en fonction de n.
Déterminer la limite de la suite (v_n) .
2.c. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n=12000-2000\times0,75^n$
2.d. En vous appuyant sur les réponses données aux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?

3. On admet dans cette question que la suite (u_n) est croissante.
On aimerait déterminer l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11950 voitures.
3.a. Recopier l'algorithme suivant et compléter les pointillés afin qu'il permette de répondre au problème posé.

Initialisation	U prend la valeur 10000
	N prend la valeur 0
Traitement	Tant que . . . .
	N prend la valeur . . . .
	U prend la valeur . . . .
	Fin Tant que
Sortie	Afficher . . . .

3.b. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'année recherchée.
3.c. Retrouver ce résultat en résolvant l'inéquation :
$$12000-2000\times0,75^n\geqslant11950 .$$

CORRECTION

1. Pour tout entier naturel n :

u_{n+1} est le nombre de voitures du parc automobile au 1^{er} mars (2015+n+1).

u_n Est le nombre de voitures du parc automobile au 1^{er} mars (2015+n).

u_{n+1} est égal au nombre de voitures du parc automobile au 1^{er} mars (2015+n) diminué de 25 % de ce nombre et augmenté de 3000.

Donc $u_{n+1}=u_n-\frac{25}{100}u_n+3000=0{,}75\,u_n+3000$

2. Pour tout entier naturel n :

$v_n=u_n-12000$ donc $u_n=v_n+12000$

2.a. Pour tout entier naturel n

$v_{n+1}=u_{n+1}-12000=(0{,}75\,u_n+3000)-12000=0{,}75\,u_n-9000=0{,}75(v_n+12000)-9000$

$v_{n+1}=0{,}75\,v_n+9000-9000=0{,}75\,v_n$

(v_n) est la suite géométrique de raison $q=0{,}75$ et de 1^{er} terme $v_0=u_0-12000=10000-12000$

$v_0=-2000$

2.b. Pour tout entier naturel n

$v_n=v_0\times q^n=-2000\times 0{,}75^n$

$0<0{,}75<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^n=0.$

2.c. Pour tout entier naturel n

$u_n=v_n+12000$ donc $u_n=12000-2000\times 0{,}75^n$

2.d. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\mathbf{0}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\mathbf{12000}$

Dans un grand nombre d'années, le nombre de voitures que comptera le parc automobile sera voisin de 12 000.

3. On suppose que la suite (u_n) est croissante.

3.a.

Initialisation	U prend la valeur 10000
	N prend la valeur 0
Traitement	Tant que **U < 11 950**
	N prend la valeur **N+1**
	U prend la valeur **0,75U+3000**
	Fin Tant que
Sortie	Afficher **2015+N**

3.b. On donne le résultat (à l'unité près si nécessaire) après chaque boucle, tant que le résultat est inférieur à 11 950.

$N=0$	$u_0=10000$
$N=1$	$u_1=10500$
$N=2$	$u_2=10875$
$N=3$	$u_3=11156$
$N=4$	$u_4=11367$
$N=5$	$u_5=11525$
$N=6$	$u_6=11644$
$N=7$	$u_7=11733$
$N=8$	$u_8=11800$
$N=9$	$u_9=11849$
$N=10$	$u_{10}=11887$
$N=11$	$u_{11}=11916$

$N=12 \qquad u_{12}=11937$

$N=13 \qquad u_{13}=11952$

L'année affichée : **2015+13= 2028**

3.c. $12000-2000\times0{,}75^n\geqslant11950 \quad\Leftrightarrow\quad 12000-11950\geqslant2000\times0{,}75^n \quad\Leftrightarrow\quad 50\geqslant2000\times0{,}75^n$

$\Leftrightarrow \quad \frac{50}{2000}\geqslant0{,}75^n \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{40}\geqslant0{,}75^n$

ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{40}\right)\geqslant\ln\left(0{,}75^n\right) \quad\Leftrightarrow\quad -\ln(40)\geqslant n\times\ln(0{,}75)$

$0 < 0{,}75 < 1$ donc $\ln(0{,}75) < \ln(1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{-\ln(40)}{\ln(0{,}75)}\leqslant n$

$\frac{-\ln(40)}{\ln(0{,}75)}=12{,}8$ à 10^{-3} près

n est un entier naturel donc $13\leqslant n$

Conclusion

En 2015+13=2028, le nombre de voitures du parc automobile de l'agence sera supérieur à 11 950 (pour la première année).