Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Afin de se préparer à courir des marathons, Hugo aimerait effectuer quotiennement un footing à compter du 1^{er} janvier 2014.
On admet que :
. Si Hugo court un jour donné, la probabilité qu'il ne court pas le lendemain estde $0{,}2$;
. S'il ne court pas un jour donné, la probabilité qu'il ne court pas le lendemain est de $0{,}4$.
On note C l'état « Hugo court » et R « Hugo ne court pas ».
Pour tout entier naturel n, on note :
. c_n la probabilité de l'événement « Hugo court le $(n+1)^{ième}$ jour » ;
. r_n la probabilité de l'événement « Hugo ne court pas le $(n+1)^{ième}$ jour » ;
. P_n la matrice $\begin{pmatrix} c_n & r_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste le $(n+1)^{ième}$ jour.
Le 1^{er} janvier 2014, motivé, le jeune homme court.
On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} c_0 & r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R.

2. Ecrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

3. On donne $M^6 = \begin{pmatrix} 0{,}750016 & 0{,}249984 \\ 0{,}749952 & 0{,}250048 \end{pmatrix}$

Quel calcul matriciel permet de déterminer la probabilité c_6 qu'Hugo court le $7^{ième}$ jour ?
Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de c_6.

4.a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.

4.b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 0{,}2\, c_n + 0{,}6$

5. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = c_n - 0{,}75$.

5.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,2. Préciser le premier terme.

5.b. Exprimer v_n en fonction de n.
Déterminer la limite de la suite (v_n).

5.c. Justifier que, pour tout entier naturel n, $c_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^n$.

5.d. Que peut-on conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 ?

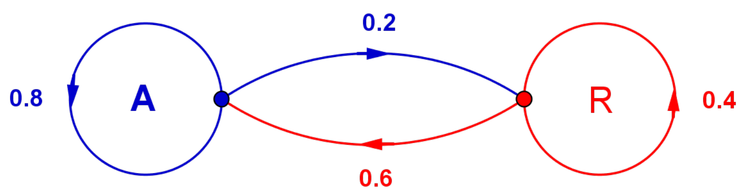
5.e. Conjecturer alors l'état stable de ce graphe.
Comment valider votre conjecture ?

CORRECTION

1. « Si Hugo court un jour donné, la probabilité qu'il ne court pas le lendemain est 0,2 »
donc la probabilité qu'il court le lendemain est 1-0,2= 0,8.
Conséquences
Le poids de l'arête **CR** est égal à **0,2.**
Le poids de l'arête **CC** est égal à **0,8.**

. « Si Hugo ne court pas un jour donné, la probabilité qu'il ne court pas le lendemain est 0,4 »
donc la probabilité qu'il court le lendemain est 1-0,4= 0,6.
Conséquences
Le poids de l'arête **RR** est égal à **0,4.**
Le poids de l'arête **RC** est égal à **0,6.**

. On obtient le graphe probabiliste suivant :



2. L'ordre des sommets est C puis R.

La matrice de transition M du graphe probabiliste est : $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête CC : 0,8
m_{12} est le poids de l'arête CR : 0,2
m_{21} est le poids de l'arête RC : 0,6
m_{22} est le poids de l'arête RR : 0,4

$M=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$

3. Pour tout entier naturel n
$P_n=P_0\times M^n$
donc $P_6=P_0\times M^6=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,750016 & 0,249984 \\ 0,749952 & 0,250048 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,750016 & 0,249984 \end{pmatrix}$
$c_6=0,75$ à 10^{-2} près.

4.a. Pour tout entier naturel n :
$P_{n+1}=P_n M$

4.b. $\begin{pmatrix} c_{n+1} & r_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_n & r_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{n+1}=0,8\,c_n+0,6\,r_n \\ r_{n+1}=0,2\,c_n+0,4\,r_n \end{cases}$

Pour tout entier naturel n, on a : $c_n+r_n=1$ donc $r_n=1-c_n$

On obtient :
$c_{n+1}=0,8\,c_n+0,6(1-c_n)=0,8\,c_n+0,6-0,6\,c_n=0,2\,c_n+0,6$

5. Pour tout entier naturel n
$v_n=c_n-0,75$ donc $c_n=v_n+0,75$

5.a. Pour tout entier naturel n :
$v_{n+1}=c_{n+1}-0,75=0,2\,c_n+0,6-0,75=0,2(v_n+0,75)-0,15=0,2\,v_n+0,15-0,15$
$v_{n+1}=0,2\,v_n$
(v_n) est la suite géométrique de raison 0,2 et de premier terme $v_0=c_0-0,75=1-0,75=0,25$.

5.b. Pour tout entier naturel n :

$v_n = v_0 \times q^n = 0{,}25 \times 0{,}2^n$

$0 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} 0{,}2^n = 0$

et $\lim_{n \to +\infty} v_n = \mathbf{0.}$

5.c. Pour tout entier naturel n, $c_n = v_n + 0{,}75$

donc $c_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^n$

5.d. 2014 n'était pas une année bissectile donc le 29 décembre 2014 est le $263^{\text{ème}}$ jour de l'année et c_{262} est la probabilité qu'Hugo court le 29 décembre 2014.

En utilisant la calculatrice on obtient $0{,}2^{262} = 0$ (par exemple $0{,}2^{100} = 1{,}3 \times 10^{-70}$)

On peut conjecturer que $C_{262} = 0{,}75$.

5.e. <u>Conjecture</u>

L'état stable de ce graphe est $P = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ (0,25=1-0,75).

Pour valider cette conjecture il suffit de vérifier que : $P \times M = P$ car $0{,}75 + 0{,}25 = 1$

$P \times M = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 \times 0{,}8 + 0{,}6 \times 0{,}25 & 0{,}75 \times 0{,}2 + 0{,}25 \times 0{,}4 \end{pmatrix}$

$P \times M = \begin{pmatrix} 0{,}6 + 0{,}15 & 0{,}15 + 0{,}10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix} = P$

La conjecture est bien vérifiée.