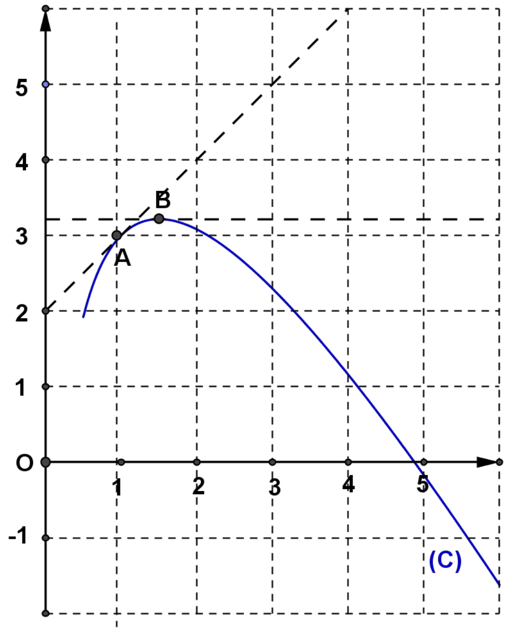
Exercice 4 6 points

La courbe (C) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur [0,5:6].
Les points $A(1;3)$ et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe (C).
Les tangentes à la courbe (C) aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.
On note f' la fonction dérivée de f.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Etude graphique

1. Déterminer $f'(1,5)$.
2. La tangente à la courbe (C) passant par A passe par le point de coodonnés (0;2).
   Déterminer une équation de cette tangente.
3. Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=2.
4. Déterminer la convexité de la fonction f sur [0,5;6]. Argumenter la réponse.

Partie B : Etude analytique

On admet alors que la fonction f est définie sur [0,5;6] par : $f(x)=-2x+5+3\ln(x)$.

1. Pour tout réel x de [0,5;6], calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=\dfrac{-2x+3}{x}$
2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur [0,5;6] puis dresser le tableau de variation de f sur [0,5;6].
3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement une solution une solution α sur [0,5;6].
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. En déduire le tableau de signe sur [0,5;6].
5. On considère la fonction F définie sur [0,5;6] par : $F(x)=-x^2+2x+3x\ln(x)$.

5.a. Montrer que F est une primitive de f sut [0,5;6].

5.b. En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=2.
En donner ensuite une valeur approchée arrondie au dixième.

CORRECTION

Partie A : Etude graphique

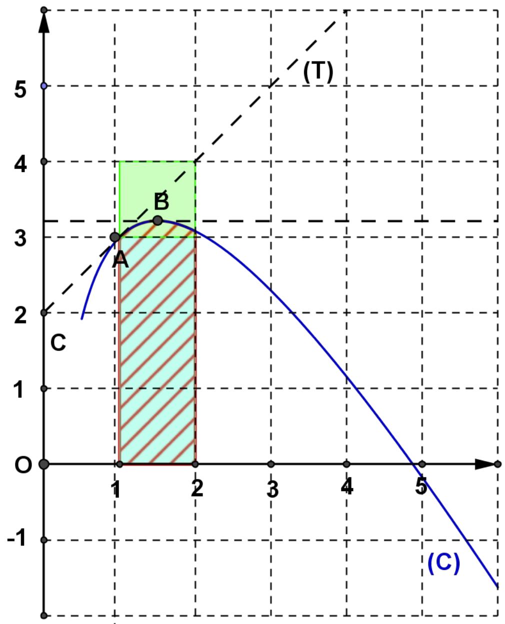
1. La tangente au point B d'abscisse 1,5 de la courbe (C) est horizontale, son coefficient directeue est nul donc $f'(1,5)=$ **0.**

2. La tangente (T) au point A à la courbe (C) passe par les points $A(1;3)$ et $C(0;2)$.

Le coefficient directeur de cette tangente est : $m=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{2-3}{0-1}=1$

(T) : y=x+b
pour x=x y=b=2
donc **y = x+2.**

3. L'unité d'aire est l'aire d'un carré de côté l'unité de longuer.



La partie de plan comprise entre la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=2 (hachuré en rouge sur le dessin), contient un rectangle de trois unités d'aire (coloré en bleu clair sur le dessin) et est contenu dans rectangle de quatre unités d'aire (constitué du rectangle précédent auquel on a ajouté un carré d'une unité d'aire coloré en vert sur le dessin).
Donc **l'aire de la partie de de plan considérée est comprise entre 3 et 4 unités d'aire.**

4. **La fonction f est concave sur [0,5;6].**
Car, on remarque que la courbe (C) est en dessous de toutes ses tangentes en tous points de la coutbe (C).

Partie B

Pour tout nombre réel de l'intervalle [0,5;6] : $f(x)=-2x+5+3\ln(x)$.

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$

f est dérivable sur [0,5;6]
$f'(x)=-2+3\times\frac{1}{x}=\frac{-2x+3}{x}$

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0,5;6], le signe de $f'(x)$ est le signe de (-2x+3)

$-2x+3\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3\geqslant 2x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{2}=1,5\geqslant x$

$-2x+3\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\leqslant 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}=1{,}5\leqslant x$

Tableau de variation de f

x	0.5		1.5		6
f'(x)		+	0	−	
f(x)	f(0.5)	↗	f(1.5)	↘	f(6)

$f(1{,}5)=-3+5+3\ln(1{,}5)=2+3\ln(1{,}5)=3{,}22$ à 10^{-2} près
$f(0{,}5)=4+3\ln(0{,}5)=1{,}92$ à 10^{-2} près
$f(6)=-12+5+3\ln(6)=-7+3\ln(6)=-1{,}62$ à 10^{-2} ptès.

3. f est croissante sur [0,5;1] donc :
Si $0{,}5\leqslant x\leqslant 1$ alors $0<f(0{,}5)\leqslant f(x)$
donc l'équation f(x)=0 n'admet pas de solution sur [0,5;1]

. f est continue et strictement décroissante sur [1;6], f(1) > 0 et f(6) < 0 donc l'équaion f(x)=0 admet une unique solution α appartement à [1;6].
Conclusion
L'équation f(x)=0 admet une unique solution α appartenant à [0,5;6].
On utilise la calculatrice
$f(4)=1{,}16$ à 10^{-2} près
$f(5)=-0{,}17$ à 10^{-2} près
$4<\alpha<5$
$f(4{,}9)=-0{,}03$ à 10^{-2} près
$f(4{,}8)=0{,}11$ à 10^{-2} près
$4{,}8<\alpha<4{,}9$
$f(4{,}88)=-0{,}004$ à 10^{-3} près
$f(4{,}87)=-0{,}009$ à 10^{-3} près
$4{,}87<\alpha<4{,}88$
4,88 est une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4. f est croissante sur [0,5;1]
Si $0{,}5\leqslant x\leqslant 1$ alors $0<f(0{,}5)\leqslant f(1)$
f est strictement décroissante sur [1;6}
Si $1\leqslant x<\alpha$ alors $f(x)>f(\alpha)=0$
Si $\alpha<x\leqslant 6$ alors $f(\alpha)=0>f(x)$
On donne le signe de f'x) sous la forme d'un tableau

x	0.5		α		6
f(x)		+	0	−	

5. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0,5;6]
$F(x)=-x^2+2x+3x\ \ln\ (x)$

5.a F est dérivable sur [0,5;6]

$$F'(x)=-2x+2+3\times\ \ln\ (x)+3x\times\frac{1}{x}-2x+2+3\ln(x)+3=-2x+5+3\ln(x)=f(x)$$

F est une primitive de f sur [0,5;6].

5.b. f est positive et continue sur [0,5;6] donc l'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=2, est $\int_1^2 f(x)\,dx$.

Or $\int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1) = -4+4+6\ln(2) - (-1+2+3\ln(1))6 = \ln(2) - 1$ = **3,2** à 10^{-1} près.