

Exercice 1**5 points**

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir au millième.

A partir d'une étude statistique dans une chaîne de restaurants, on a modélisé le comportement des clients par :

- . 60 % des clients sont des hommes ;
- . 80 % des hommes mangent un dessert alors que seulement 45 % des femmes en mangent un.

On interroge au hasard un client de cette chaîne. On note :

- . H l'événement « le client interrogé est un homme » ;
- . D l'événement « le client a mangé un dessert ».

On note également :

- . \bar{A} l'événement contraire de A ;
- . $P(A)$ la probabilité d'un événement A.

Partie A

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le client interrogé soit un homme et ait mangé un dessert.
3. Montrer que $P(D) = 0,66$
4. Le client interrogé affirme avoir pris un dessert. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

Partie B

Le directeur de cette chaîne souhaite savoir si ses clients actuels sont satisfaits des menus proposés dans ses restaurants.

Une enquête de satisfaction est réalisée sur un échantillon de 300 clients et 204 se déclarent satisfaits des menus proposés.

1. Donner un intervalle de confiance au niveau de 95 % de la proportion de clients satisfaits.
2. Le directeur souhaite cependant avoir une estimation plus précise et donc veut un intervalle de confiance au niveau de 95 % d'amplitude 0,06.
Déterminer le nombre de personnes à interroger pour obtenir un tel intervalle.

CORRECTION

Partie A

1. L'énoncé précise :

- 60 % des clients sont des hommes donc $P(H)=0,6$.

Conséquence

$\bar{H}=F$ l'événement « le client interrogé est une femme ».

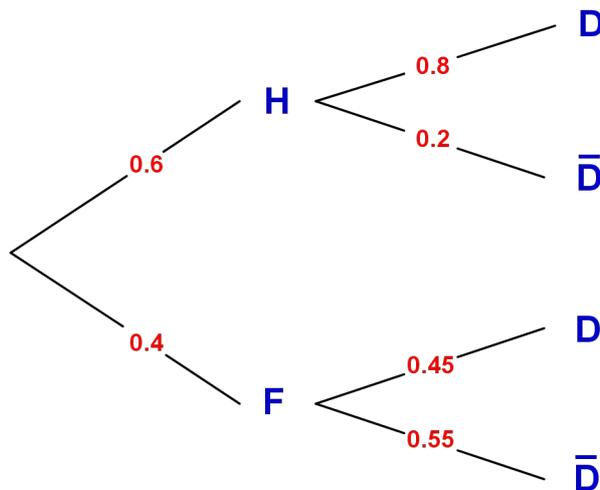
$$P(F)=1-0,6=0,4$$

- 80 % des hommes mangent un dessert et 45 % des femmes en mangent un, $P_H(D)=0,8$ et $P_F(D)=0,48$.

Conséquence

$$P_H(\bar{D})=1-0,8=0,2 \text{ et } P_F(\bar{D})=1-0,45=0,55$$

- On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. On nous demande de calculer : $P(H \cap D)$

$$P(H \cap D) = P(H) \times P_H(D) = 0,6 \times 0,8 = \mathbf{0,48}.$$

3. En utilisant la formule des probabilités totales ou l'arbre pondéré.

$$P(D) = P(H \cap D) + P(F \cap D)$$

$$P(F \cap D) = P(F) \times P_F(D) = 0,4 \times 0,45 = 0,18$$

$$P(D) = 0,48 + 0,18 = \mathbf{0,66}.$$

4. On nous demande de calculer : $P_D(F)$

$$P_D(F) = \frac{P(D \cap F)}{P(D)} = \frac{0,18}{0,66} = \frac{3}{11} = \mathbf{0,273} \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Partie B

1. La proportion de clients satisfaits dans l'échantillon de 300 personnes est : $p = \frac{204}{300} = 0,68$.

$$n = 300 \geq 30 \quad np = 300 \times 0,68 = 204 \geq 5 \quad n(1-p) = 300 \times 0,32 = 96 \geq 5$$

$$\text{Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 \% est : } I = \left[0,68 - \frac{1}{\sqrt{300}}; 0,68 + \frac{1}{\sqrt{300}} \right].$$

$$\frac{1}{\sqrt{300}} = 0,058 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

$$I = [0,68 - 0,058; 0,68 + 0,058] = \mathbf{[0,622; 0,738]}$$

2. L'amplitude de l'intervalle précédent est $0,738 - 0,622 = 0,116$.

Le directeur souhaite un intervalle d'amplitude : 0,06.

Soit n le nombre de personnes interrogées, l'amplitude de l'intervalle de confiance au niveau de confiance

95 % est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,06 \Leftrightarrow \frac{2}{0,06} = \sqrt{n} \Leftrightarrow n = \left(\frac{2}{0,06}\right)^2 = 1111,111 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

n Est entier naturel donc **$n = 1112$** .