Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Le 31 décembre 2015 une forêt comportait 1500 arbres. Les exploitants de cette forêt prévoit que chaque année, 5 % des arbres seront coupés et 50 arbres seront plantés.
On modélise le nombre d'arbre de cette forêt par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n le nombre d'arbres au 31 décembre de l'année (2015+n).
Ainsi $u_0=1500$.

Partie A

1. Calculer u_0 et u_1 .

2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=0{,}95\,u_n+50$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-1000$.
3.a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. En préciser la raison et le premier terme.
3.b. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n=1000+500\times 0{,}95^n$.
3.c. En déduire le nombre d'arbres prévisibles dans cette forêt le 31 décembre 2030.

Partie B

Les arbres coupés dans cette forêt sont utilisés pour le chauffage. Le prix d'une stère de bois (unité de volume mesurant le bois) augmente chaque année de 3 %.
Au bout de combien d'années le prix d'une sphère de bois aura-t-il doublé ?

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

1. Le nombre d'arbres au 31 décembre 2015 est $u_0=1500$.

Pendant l'année 2016=2015+1, il y a 5 % des arbres qui sont coupés, soient $\frac{5}{100}\times 1500=75$ et 50 arbres sont plantés donc le nombre d'arbres au 31 décembre 2016 est $u_1=1500-75+80=$ **1475.**

Pendant l'année 2017=2015+2, il y a 5 % des arbres qui sont coupés soient $\frac{5}{100}\times 1475=74$ (arrondi à l'unité) et 50 arbres sont plantés donc le nombre d'arbres au 31 décembre 2017 est $u_2=1475-74+50=$ **1451.**

2. Pour tout entier naturel n :

u_n est le nombre d'arbres de la forêt au 31 décembre 2015+n

u_{n+1} est le nombre d'arbres de la forêt au 31 décembre 2015+(n+1).

Le nombre d'arbres au 31 décembre 2015+(n+1) est égal au nombre d'arbres au 31 décembre 2015+n diminué de 5 % de ce nombre et augmenté de 50 donc :

$$u_{n+1}=u_n-\frac{5}{100}u_n+50=(1-0{,}05)u_n+50=0{,}95\,u_n+50$$

3. Pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-1000$ donc $u_n=v_n+1000$.

3.a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-1000=0{,}95\,u_n+50-1000=0{,}95(v_n+1000)-950=0{,}95\,v_n+950-950$$

$$v_{n+1}=0{,}95\,v_n$$

(v_n) est la suite géométrique de raison **0,95** et de premier terme $v_0=u_0-1000=1500-1000=$ **500**

3.b. Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0\times q^n=500\times 0{,}95^n$ et $u_n=v_n+1000=1000+500\times 0{,}95^n$

3.c. Le nombre d'arbres prévisibles dans cette forêt au 31 décembre 2030=2015+15 est :

$u_{15}=1000+500\times 0{,}95^{15}$

En utilisant la calculatrice

$u_{15}=1000+232=$ **1232** à l'unité près.

Partie B

Le prix d'un stère de bois augmente de 3 % chaque année, donc le coefficient multiplicateur pour passer d'une année à la suivante est : $1+\frac{3}{100}=1{,}03$.

Pour tout entier naturel n :

Le coefficient multiplicateur pour passer de l'année 2015 à l'année 2015+n est donc $1{,}03^n$.

Le prix d'un stère de bois aura doublé dès que $1{,}03^n\geqslant 2$

La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$1{,}03^n\geqslant 2 \Leftrightarrow \ln(1{,}03^n)\geqslant\ln(2) \Leftrightarrow n\times\ln(1{,}03)\geqslant\ln(2)$

$1<1{,}03$ donc $\ln(1)=0<\ln(1{,}03)$

$\Leftrightarrow n>\frac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)}$

En utilisant la calculatrice : $\frac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)}=23{,}45$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel donc $n\geqslant 24$.

En 2015+24=2039 le prix du stère de bois aura doublé.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés