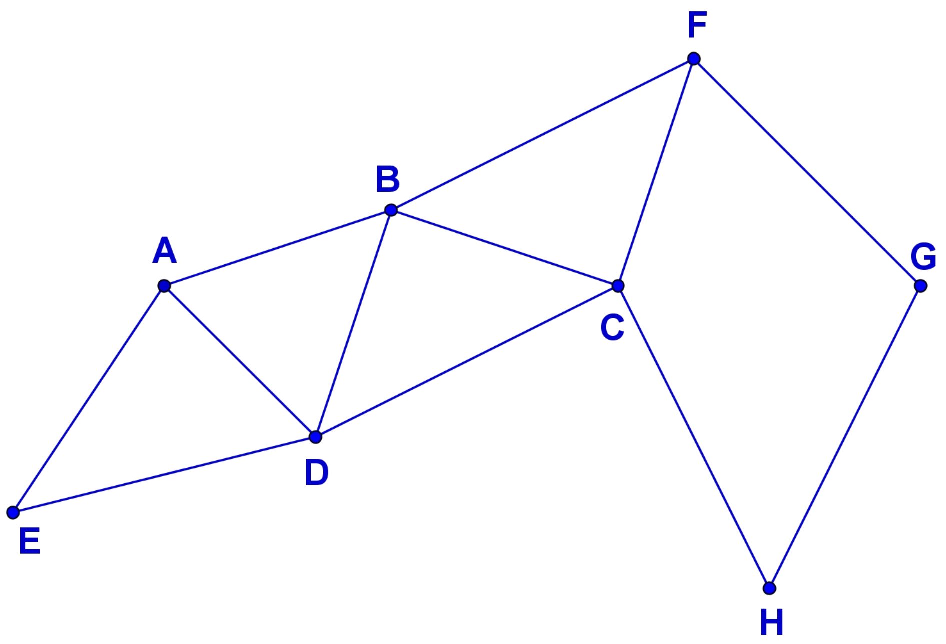
Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un parc de loisirs décide d'ouvrir une nouvelle attraction pour les jeunes enfants : un parcours pédestre où chaque enfant doit recueillir, sur différents lieux, des indices pour résoudre une énigme. Le parcours est représenté par le graphe ci-dessous. Les sommets représentent les lieux où sont placés les indices ; les arêtes représentent des chemins pédestres qui les relient.



Partie A

1. Un enfant pourra-t-il parcourir chaque chemin pédestre du circuit une fois et une seule fois ?
Si oui, indiquer un circuit possible et sinon expliquer pourquoi.

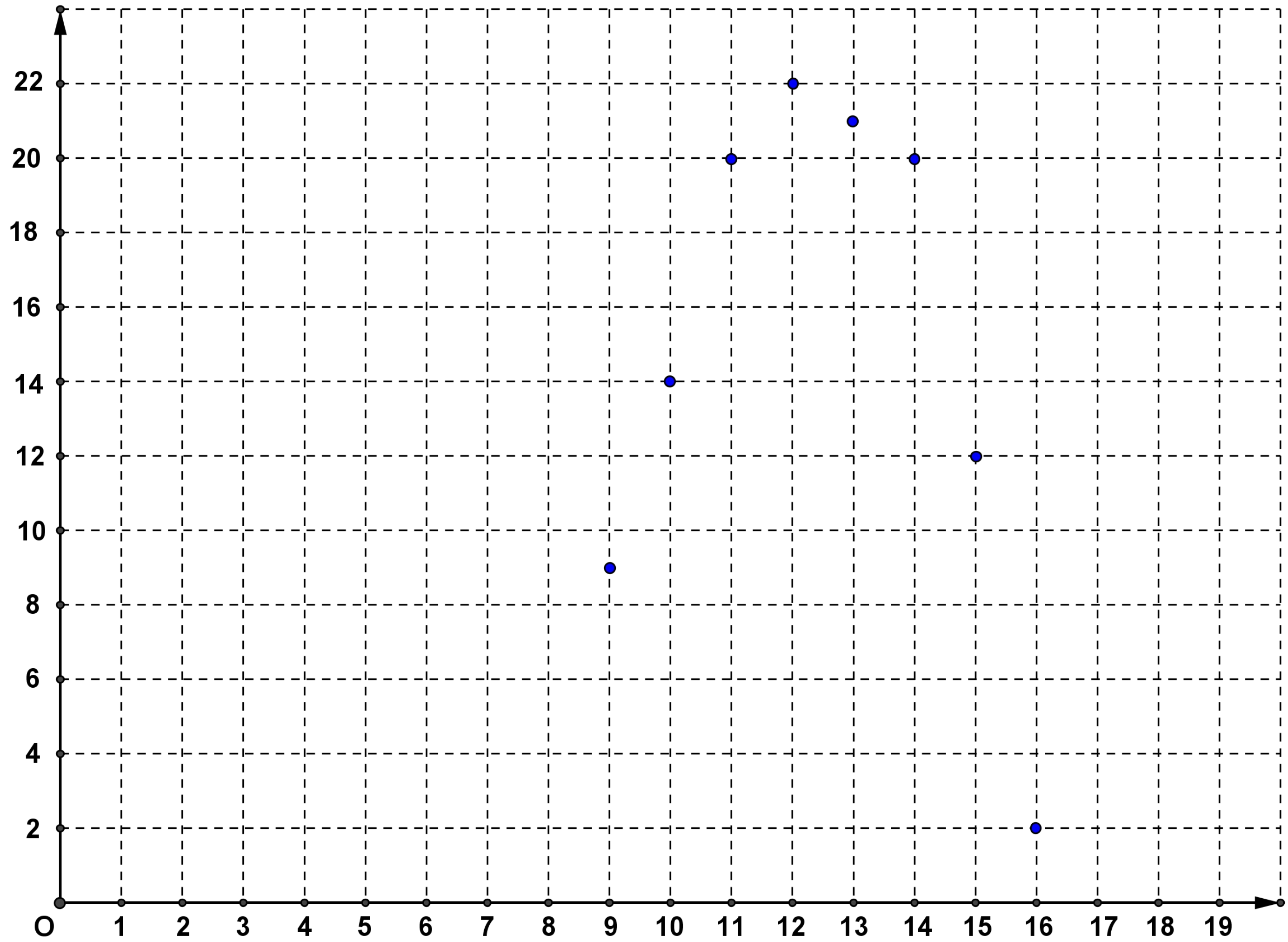
2. On note M la matrice d'adjacence associée è ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique.

On donne la matrice $M^4 = \begin{pmatrix} 20 & 18 & 20 & 21 & 11 & 13 & 5 & 5 \\ 18 & 32 & 25 & 25 & 17 & 16 & 10 & 10 \\ 20 & 25 & 31 & 19 & 13 & 13 & 14 & 5 \\ 21 & 25 & 19 & 31 & 13 & 21 & 4 & 12 \\ 11 & 17 & 13 & 13 & 11 & 6 & 4 & 3 \\ 13 & 16 & 13 & 21 & 6 & 20 & 3 & 13 \\ 5 & 10 & 14 & 4 & 4 & 3 & 9 & 1 \\ 5 & 10 & 5 & 12 & 3 & 13 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

Déterminer le nombre de parcours allantde E à H en 4 chemins pédestres.
Les citer tous.

Partie B

Afin d'améliorer la qualité de ses services, une étude statistique a relevé la durée moyenne d'attente en minutes à la billetterie du parc en fonction de l'heure ? Ce relevé aeu lieu chaque heure de 9h à 16h. On obtient le relevé suivant :



Ainsi, à 10h, il y avait 14 minutes d'attente à la billeterie.
On souhaite modéliser cette durée d'attente par une fonction qui à l'heure associe la durée d'attente en minutes.
Ainsi, il sera possible d'avoir une estimation de la durée d'attente.
On choisit de modéliser cette situation à l'aide de la fonction f définie par :

$$f(x) = a x^2 + b x + c$$

avec a, b, c des réels et a non nul telle que les trois points de coordonnées (9;9), (11;20) et (16;2) appartiennent à la représentation graphique de f.

1. Calculer les trois réels a, b et c.

2. En utilisant ce modèle, déterminer sur quelle(s) plage(s) horaire(s) l'attente peut être inférieure à dix minutes

CORRECTION

1. On nous demande si le graphe admet une chaîne eulérienne.

Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

On détermine le degré de chaqhe sommet et on donne le résultat sous la forme d'un tableau.

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	3	4	4	4	2	3	2	2

Le graphe admet deux sommets et seulement deux de degré impair donc le graphe admet une chaîne eulérienne.

Un enfant pourra donc parcourir chaque chemin pédestre une fois et uneseule.

Exemple

(rappel : le sommet initial et le sommet final sont les deux sommets de degré impair)

A-E-D-A-B-D-CB-F-C-H-G-F

2. La matrice $M^4=(m_{ij})$ i ligne ; j colonne

Le coefficient m_{ij} est le nombre de chaînes de longueur 4 reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet.

E est le $5^{\text{ème}}$ sommet H et le $8^{\text{ème}}$ sommet et $m_{58}=3$

Il existe donc trois chaînes de longueur 4 reliant E à H.

E-A-D-C-H

E-A-B-C-H

E-D-B-C-H

Partie B

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [9;16] $f(x)=ax^2+bx+c$.

Les points de coordonnées (9;9) ; (11;20) et (16;2) appartiennent à la courbe représentative de f si et seulement si $f(9)=9$; $f(11)=20$ et $f(16)=2$.

On obtient un système de trois équations à trois inconnues : a, b et c :

$$\begin{cases} 81a+9b+c=9 \\ 121a+11b+c=20 \\ 256a+16b+c=2 \end{cases}$$

On peut écrire ce système sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 81 & 9 & 1 \\ 121 & 11 & 1 \\ 256 & 16 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix} 81 & 9 & 1 \\ 121 & 11 & 1 \\ 256 & 16 & 1 \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On doit résoudre l'équation d'inconnue X : MxX=D

Pour cela en utilisant la calculatrice, on obtient la matrice inverse de M.

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} 0{,}0714 & -0{,}1 & 0{,}0286 \\ -1{,}9286 & 2{,}5 & -0{,}5714 \\ 12{,}5714 & -14{,}4 & 2{,}8286 \end{pmatrix}$$

(On peut obtenir pour certaine calculatrice, les coefficients de la matrice sous forme fractionnaire).

$M\times X=D \quad \Leftrightarrow \quad M^{-1}\times(M\times X)=M^{-1}\times D$

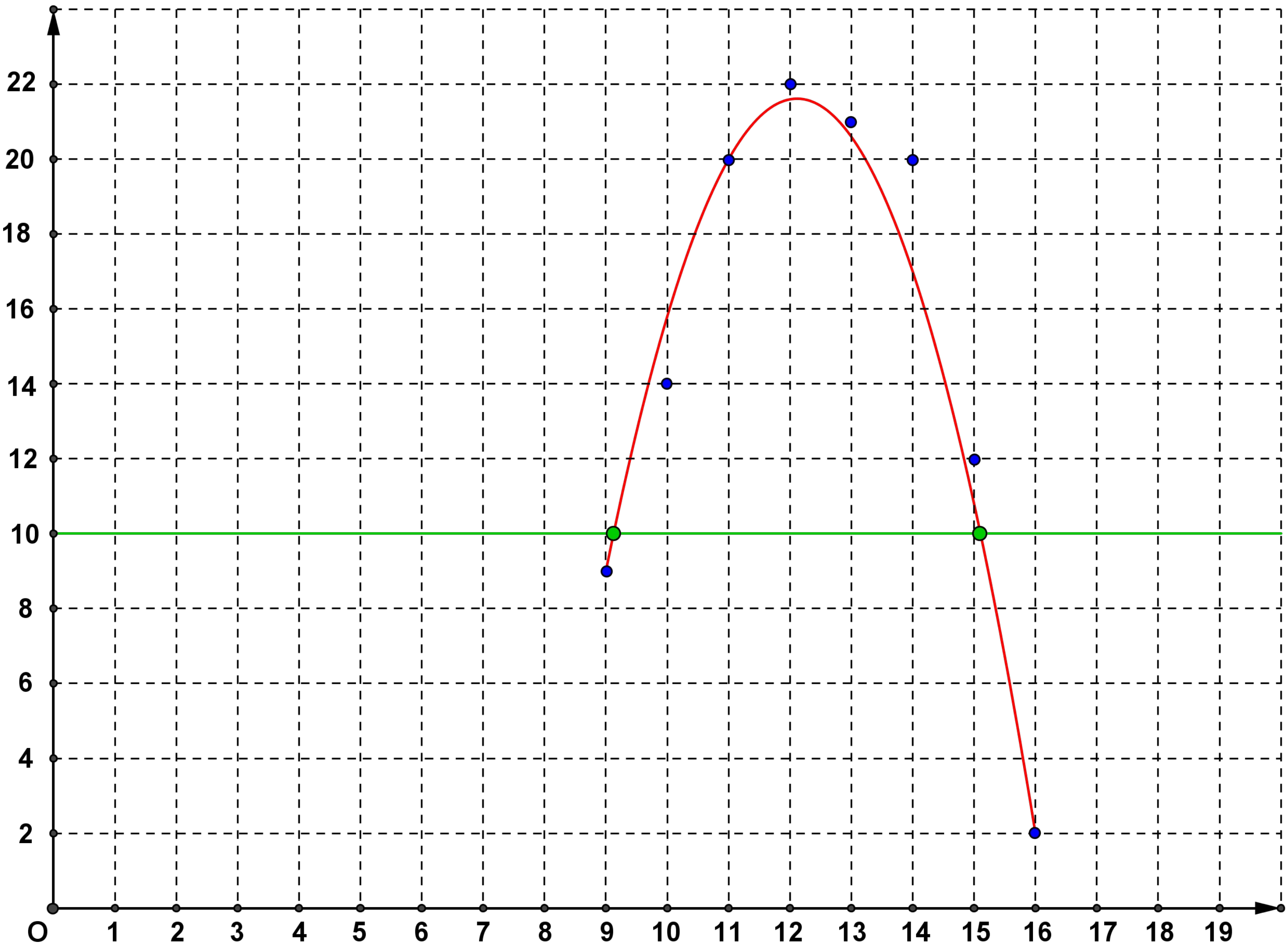
En utilisant la calculatrice pour calculer le produit $M^{-1}\times D$

On obtient $X=\begin{pmatrix} -1,3 \\ 31,5 \\ -169,2 \end{pmatrix}$

donc **a=-1,3 ; b=31,5 ; c=-169,2**

et $f(x)=-1,3\,x^2+31,5\,x-169,2$

On trace la parabole qui est la courbe représentative de f.



2. On détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation y = 10.

$-1,3\,x^2+31,5\,x-169,2=10 \quad \Leftrightarrow \quad T(x)=-1,3\,x^2+31,5\,x-179,2=0$

$\Delta=31,5^2-4\times1,03\times179,2=992,25-931,84=60,41$

$\sqrt{\Delta}=7,77$ à 10^{-2} près

$x_1=\dfrac{-31,5+7,77}{-2\times1,03}=9,1$ à 10^{-1} près

$x_2=\dfrac{-31,5-7,77}{-2\times1,03}=15,1$ à 10^{-1} près

Les abscisses des deux points d'intersection de le courbe représentative de f et de la droite d'équation y = 10 sont : 9,1 et 15,1.

$T(x)=f(x)-10$

Le temps d'attente est inférieur ou égal à 10 si et seulement si $f(x) \leqslant 10$ c'est à dire $T(x) \leqslant 10$.
Le coefficient de x^2 est négatif.

x	9		x_1		x_2		18
Signe de T(x)		−	0	+	0	−	

$T(x) \leqslant 0$ Si et seulement si $9 \leqslant x \leqslant x_1$ ou $x_2 \leqslant x \leqslant 18$.

$x_1 = 9{,}1$ c'est à dire 9h + $\frac{1}{10}$ d'heure donc 9h 6 mn

<u>**Conclusion**</u>

Le temps d'attente est inférieur à 10 minutes entre 9h et 9h 6mn et entre 15h 6 mn et 18h.