Exercice 4 6 points

On définit la fonction g sur l'intervalle [0,5;5] par : $g(x)=5x-3x\ln(x)$.

1. Montrer que pour tout x appartenant à [0,5;], $g'(x)=2-3\ln(x)$.

2. Etudier le signe de $g'(x)$ et en déduire le sens de variation de g sur [0,5;5].

3. En déduire pour quelle valeur x_0 , arrondie au centième, la fonction g atteint un maximum.

4. Montrer que l'équation $g(x)=4$ admet deux solutionss sur [0,5:5] que l'on note α_1 et α_2 .
En donner un encadrement d'amplitude 0,01.

5. Résoudre $g(x)\geqslant 4$.

6. Montrer que la fonction G définie sur [0,5;5] par : $G(x)=-\frac{3}{2}x^2\ln(x)+\frac{13}{4}x^2$ est une primitive de g sur l'intervalle [0,5;6].

7. Calculer alors la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle [0,5;5]. On donnera la valeur arrondie au millième.

CORRECTION

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0,5;6] : $g(x)=5x-3x\ln(x)$.

1. g est dérivable sur [0,5;5]

$(-3x)'=-3 \qquad (\ln(x))'=\frac{1}{x}$

$g'(x)=4-3\ln' x ¿+(-3x)\times\frac{1}{x}=5-3\ln(x)-3$

$g'(x)=2-3\ln(x)$

2. $g'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2-3\ln(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2=3\ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x)=\frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow$

$x=e^{\frac{2}{3}}$

$g'(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad 2-3\ln(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad 2>3\ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}>\ln(x)$

La fonction exponentiele est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$e^{\frac{2}{3}}>e^{\ln(x)}=x$

De même

$g'(x)<0 \quad \Leftrightarrow$

$e^{\frac{2}{3}}<x$

On donne le sens de variation de g sur la forme d'un tableau.

x	0.5		$e^{\frac{2}{3}}$		5
g'(x)		+	0	−	
g(x)		$\nearrow$		$\searrow$	

3. La fonction g atteint un maximum pour $x_0=e^{\frac{2}{3}}$

En utilisant la calculatrice on obtient : x_0 = **1,95** à 10^{-2} près

4. Pour dresser le tableau de variation de g, on calcule les valeurs aux bornes et le maximum de la fonction g.

$g(0,5)=5\times 0,5-3\times 0,5\times\ln(0,5)=2,5-1,5\times\ln(0,5)$ = **3,54** à 10^{-2} près (g(0,5)<4).

$g(5)=5\times 5-3\times 5\times\ln(5)=25-15\times\ln(5)$ = **0,86** à 10^{-2} près (g(5)<4)

$g(x_0)=5e^{\frac{2}{3}}=5e^{\frac{2}{3}}+3e^{\frac{2}{3}}\ln\left(e^{\frac{2}{3}}\right)$

or $\ln\left(e^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2}{3}\ln(e)=\frac{2}{3}$

$g(x_0)=5e^{\frac{2}{3}}-3\times\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}}=3e^{\frac{2}{3}}$ = **5,84** à 10^{-2} près

x	0.5	α_1	x_0	α_2	5
g(x)	g(0.5) ↗	4 ↗	$g(x_0)$	↘ 4	↘ g(5)

g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0{,}5\,;x_0]$ et $g(0{,}5)<4<g(x_0)$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution α_1 à l'équation $g(x)=4$ appartenant à l'intervalle $[0{,}5\,;x_0]$.

g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[x_0\,;5]$ et $g(x_0)>4>g(x)$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution α_2 à l'équation $g(x)=4$ appartenant à l'intervalle $[x_0\,;5]$.

En utilisant la calculatrice

g(0,5)=3,54	et	g(1)=5	donc	$0{,}5<\alpha_1<1$
g(0,6)=3,92	et	g(0,7)=4,25	donc	$0{,}6<\alpha_1<0{,}7$
g(0,62)=3,99	et	g(0,63)=4,05	donc	$0{,}62<\alpha_1<0{,}63$
g(3)=5,11	et	g(4)=4,17	donc	$3<\alpha_2<4$
g(3,6)=4,17	et	g(3,7)=3,98	donc	$3{,}6<\alpha_2<3{,}7$
g(3,69)=3,997	et	g(3,70)=3,98	donc	$3{,}69<\alpha_2<3{,}70$

5. $g(x)\geqslant 4$

Si $0{,}5\leqslant x<\alpha_1$ alors $g(x)<g(\alpha_1)=4$

Si $\alpha_1\leqslant x\leqslant x_0$ alors $g(\alpha_1)=4\leqslant g(x)$

Si $x_0\leqslant x\leqslant\alpha_2$ alors $g(x)\geqslant g(\alpha_2)=4$

Si $\alpha_2<x\leqslant 5$ alors $g(\alpha_2)=4>g(x)$

<u>Conclusion</u>

$g(x)\geqslant 4$ si seulement si $\alpha_1\leqslant x\leqslant\alpha_2$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x)\geqslant 4$ est $[\alpha_1;\alpha_2]$.

6. Pour tout nombre réel x ce l'intervalle [0,5;5] :

$$G(x)=-\frac{3}{2}x^2\ln(x)+\frac{13}{4}x^2$$

G est dérivable sur [0,5;5]

$$\left(-\frac{3}{2}x^2\right)'=-\frac{3}{2}\times 2x=-3x \qquad (\ln(x))'=\frac{1}{x} \qquad \left(\frac{13}{4}x^2\right)'=\frac{13}{4}\times 2x=\frac{13}{2}x$$

$$G'(x)=-3x\ln(x)-\frac{3}{2}x^2\times\frac{1}{x}+\frac{13}{2}x=-3x\ln(x)-\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}x=-3x\ln(x)+\frac{10}{2}x=5x-3x\ln(x)$$

$$G'(x)=g(x)$$

G est une primitive de g sur [0,5;5].

7. La valeur moyenne de G sur l'intervalle [0,5;5] est $m=\dfrac{1}{5-0{,}5}\displaystyle\int_{0{,}5}^{5}g(x)\,dx$

$$m=\frac{1}{4{,}5}(G(5)-G(0{,}5))=\frac{1}{4{,}5}\left(-\frac{75}{2}\ln(5)+\frac{325}{4}+\frac{0{,}75}{2}\ln(0{,}5)-\frac{3{,}25}{4}\right)$$

$$m=-\frac{75}{9}\ln(5)+\frac{0{,}75}{9}\ln(0{,}5)+\frac{321{,}25}{18}$$

En utilisant la calculatrice, on obtient :
m = 4,405 à 10^{-3} près.

On propose une figure non demandée (que l'on peut obtenir rapidement sur l'écran de la calculatrice).