

Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=350$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=0,5u_n+100$.

1. Calculer u_1 et u_2 .

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n=u_n-200$.

2.a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2.b Démontrer que, pour tout entier naturel n , $w_n=200+150 \times 0,5^n$.

Partie B

Une commune propose aux enfants d'adhérer à une association sportive. Au premier septembre 2015 le nombre d'enfants inscrits dans cette association est 500 dont 350 filles.

Les statistiques relatives aux années précédentes nous amènent, pour l'évolution du nombre d'adhérents lors des prochaines années à la modélisation suivante :

- . Chaque année, la moitié des filles inscrites l'année précédente ne renouvellent pas leur inscription ; par ailleurs l'association recueille chaque année 100 nouvelles filles.
- . D'une année sur l'autre, le nombre de garçons inscrits à l'association augmente de 10 %.

1. On représente l'évolution du nombre de filles inscrites dans ce club par une suite (F_n) où F_n désigne le nombre de filles adhérentes à l'association en l'année $2015+n$. On a donc $F_0=350$.

Pour tout entier naturel n , exprimer F_{n+1} en fonction de F_n .

2. On représente l'évolution du nombre de garçons inscrit dans ce club par une suite (G_n) où G_n désigne le nombre de garçons adhérents à l'association l'année $2015+n$.

2.a. Pour tout entier naturel n , exprimer G_n en fonction de n .

2.b. A partir de quelle année le club comptera-t-il plus de 300 garçons ?

3. On souhaite savoir à partir de quelle année le nombre de garçons, dans cette association, va dépasser celui des filles. On propose l'algorithme suivant :

```

Initialisation :      Affecter à n la valeur 0
                        Affecter à G la valeur 150
                        Affecter à F la valeur 350
Traitement :        Tant que  $G \leq F$ 
                        n prend la valeur n+1
                        G prend la valeur 1,1G
                        F prend la valeur 0,5F+100
                        Fin Tant que
Sortie :            afficher le nombre n
    
```

3.a. Recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de n	0	1		
Valeur de G	150	...		
Valeur de F	350			
Condition $G \leq F$	Vrai			

3.b. En déduire l'affichage obtenu, puis répondre au problème posé.

CORRECTION

Partie A

(u_n) définie par $u_0=350$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=0,5u_n+100$

1. $u_1=0,5 \times 350 + 100 = 175 + 100 = 275$

$u_2=0,5 \times 275 + 100 = 137,5 + 100 = 237,5$

2. Pour tout entier naturel n :

$w_n = u_n - 200$ donc $u_n = w_n + 200$

2.a. Pour tout entier naturel n

$w_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0,5 \times u_n + 100 - 200 = 0,5(w_n + 200) - 100 = 0,5w_n + 100 - 100 = 0,5w_n$

$w_0 = u_0 - 200 = 350 - 200 = 150$

(w_n) est la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme 150

2.b. Pour tout entier naturel n

$w_n = w_0 \times q^n = 150 \times 0,5^n$

donc $u_n = w_n + 200 = 200 + 150 \times 0,5^n$

Partie B

1. Chaque année, la moitié des filles inscrites l'année précédente ne renouvellent pas leur inscription, par ailleurs l'association accueille 100 nouvelles filles.

Donc, pour entier naturel n :

$F_{n+1} = F_n - 0,5 \times F_n + 100 = 0,5 F_n + 100$ et $F_0 = 350$

2.a. D'une année sur l'autre le nombre de garçons inscrits au club augmente de 10 %.

Donc, pour tout entier naturel n :

$G_{n+1} = G_n + \frac{10}{100} \times G_n = 1,1 G_n$

(G_n) est la suite géométrique de premier terme $G_0 = 500 - 350 = 150$ et de raison 1,1.

Pour tout entier naturel n : $G_n = G_0 \times q^n = 150 \times 1,1^n$

$G_n > 300 \Leftrightarrow 150 \times 1,1^n > 300 \Leftrightarrow 1,1^n > \frac{300}{150} = 2$

On obtient avec la calculatrice

$1,1^7 = 1,95$ à 10^{-2} près

$1,1^8 = 2,14$ à 10^{-2} près

Le club comptera plus de 300 garçons pour la première année en $2015+8=2023$.

3.a.

Valeur de n	0	1	2	3	4
Valeur de G	150	165	182	200	220
Valeur de F	350	275	237	219	209
Condition $G \leq F$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

3.b. L'affichage obtenu est : 4

En $2015+4=2019$, le nombre de garçons dans l'association sera supérieure à celui des filles pour la première année.