Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pierre prend des cours de natation ; il effectue plusieurs plongeons.
Lorsque Pierre réussit un plongeon, il prend confiance en lui et la probabilité qu'il réussisse le plongeon suivant est de 0,7.
Par contre lorsqu'il ne réussit pas un plongeon, la probabilité qu'il réussisse le plongeon suivant est égale à 0,2.
On suppose que Pierre a réussi le premier plongeon.
L'état « plongeon réussi » est noté R.
L'état « plongeon non réussi » est noté $\bar{R}$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la probabilité que Pierre réussisse pas son $n^{\text{ième}}$ plongeon est noté a_n , tandis que la probabilité ne réussisse pas son $n^{\text{ième}}$ plongeon est notée b_n .
La matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ donne l'état probabiliste du système lors du $n^{\text{ième}}$ plongeon.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets R et $\bar{R}$.

2. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe, les sommets R et $\bar{R}$ étant classé dans cet ordre.

3. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. Avec la calculatrice, déterminer la probabilité que Pierre réussisse son quatrième plongeon.

5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0{,}5\, a_n + 0{,}2$

6. Lorsque la probabilité que Pierre réussisse son plongeon de vient inférieure ou égale à 0,41, le maître-nageur demande à Pierre de faire une pause.
On cherche alors à déterminer au bout de combien d'essais Pierre arrête sa série de plongeons.
On cherche donc à déterminer le plus petit entier naturel $n \geqslant 1$ tel que $a_n \leqslant 0{,}41$.
Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de répondre à la question posée.

Initialisation :	Affecter à N la valeur 1
	A prend la valeur 1
Traitement :	Tant que . . . . . .
	N prend la valeur . . . . . .
	A prend la valeur . . . . . .
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher . . . . . .

7. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :
$u_n = a_n - 0{,}4$.

7.a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
7.b. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = 0{,}6 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4$.
7.c. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que $a_n \leqslant 0{,}41$.
7.d. Au bout de combien d'essais Pierre arrête-t-il sa série de plongeon ?

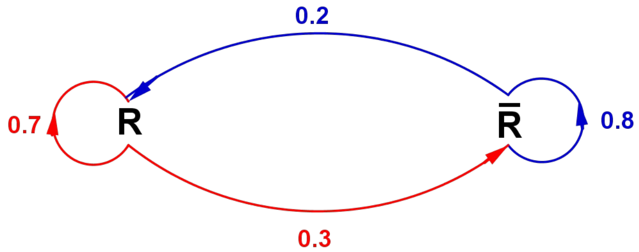
CORRECTION

1. Les deux sommets du graphe sont R et $\bar{R}$.

. « Lorsque Pierre réussit un plongeon, il prend confiance enlui et la probabilité qu'il réussisse le plongeon suivant est 007 ».
<u>Conséquence</u>
Le poids de l'arête RR est 0,7 et le poids de l'arête $R\bar{R}$ est 1-0,7=0,3.

. « Lorsque Pierre ne réussit pas un plongeon, la probabilité qu'il réussisse le plongeon suivant est : 0,2 ».
<u>Conséquence</u>
Le poids de l'arête $\bar{R}R$ est 0,2 et le poids de l'arête $\bar{R}\bar{R}$ est 1-0,2=0,8.

. On obtient le graphe probabiliste :



2. L'ordre des sommets est R puis $\bar{R}$.
Dans cet exercice on utilise les matrices lignes.
La matrice de transition M du graphe est la matrice carrée $\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête RR : 0,7
m_{12} est le poids de l'arête $R\bar{R}$: 0,3
m_{21} est le poids de l'arête $\bar{R}R$: 0,2
m_{22} est le poids de l'arête $\bar{R}\bar{R}$: 0,8

$$M=\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

3. On supose que Pierre a réussi le 1^{er} plongeon donc la probabilité qu'il réussisse le premier plongeon est 1 et la probabilité qu'il ne réussisse pas le premier plongeon est 0 donc $P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $P_2=P_1M$
$P_3=P_2M=P_1M^2$
$P_4=P_3M=P_1M^3$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $M^3=\begin{pmatrix} 0{,}475 & 0{,}525 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix}$.

$$P_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}475 & 0{,}525 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}475 & 0{,}525 \end{pmatrix}$$

5. Pour tout entier naturel n non nul :

$P_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ et $a_n+b_n=1$; $P_{n+1}=\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}$ et $a_{n+1}+b_{n+1}=1$; $P_{n+1}=P_nM$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1}=0{,}7a_n+0{,}2b_n \\ b_{n+1}=0{,}3a_n+0{,}8b_n \end{cases}$$

Donc $a_{n+1}=0{,}7a_n+0{,}2(1-a_n)=0{,}5a_n+0{,}2$

6.

Initialisation : Affecter à N la valeur 1
A prend la valeur 1
Traitement : Tant que **A > 0,41**
N prend la valeur **N+1**
A prend la valeur **0,5A+0,2**
Fin Tant que
Sortie : Afficher **N**

7. Pour tout entier naturel non nul n :
$u_n = a_n - 0{,}4$ donc $a_n = 0{,}4 + u_n$

7.a. Pour tout entier naturel n non nul :
$u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}4 = 0{,}5\,a_n + 0{,}2 - 0{,}4 = 0{,}5(u_n + 0{,}4) - 0{,}2 = 0{,}5\,u_n + 0{,}2 - 0{,}2 = 0{,}5\,u_n$
$u_1 = a_1 - 0{,}4 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$
(u_n) **est la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme 0,6.**

7.b. Pour tout entier naturel non nul n : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0{,}6 \times 0{,}5^{n-1}$.
Donc $a_n = 0{,}4 + u_n = 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}5^{n-1}$

7.c. $a_n \leqslant 0{,}41 \Leftrightarrow 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}5^{n-1} \leqslant 0{,}41 \Leftrightarrow 0{,}6 \times 0{,}5^{n-1} \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow 0{,}5^{n-1} \leqslant \frac{0{,}01}{0{,}6} = \frac{1}{60}$

ln est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}5^{n-1}) \leqslant \ln\left(\frac{1}{60}\right) \Leftrightarrow (n-1)\ln(0{,}5) \leqslant -\ln(60)$

$0 < 0{,}5 < 1$ donc $\ln(0{,}5) < 0$

$\Leftrightarrow n - 1 \geqslant \frac{-\ln(60)}{\ln(0{,}5)} \Leftrightarrow n \geqslant \frac{-\ln(60)}{\ln(0{,}5)} + 1$

$\frac{-\ln(60)}{\ln(0{,}5)} + 1 = 6{,}91$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel.
Le plus petit entier naturel tel que $a_n \leqslant 0{,}41$ est **7.**

7.d. Lorsque la probabilité que Pierre réussisse son plongeon est inférieure ou égale à 0,41, le maître-nageur demande à Pierre de faire une pause.
La probabilité que Pierre réussisse son plongeon est inférieure ou égale à 0,41 (pour la première fois) est le septième plongeon.
<u>Conclusion</u>
Le maître-nageur demande a Pierre de faire une pause après le sixième plongeon.

