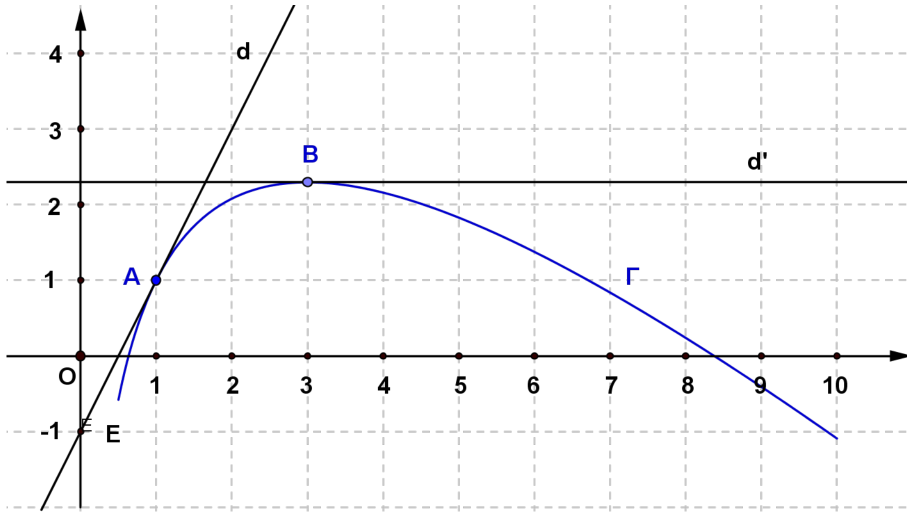
Exercice 4 — 6 points

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

La fonction f est définie sur l'intervalle [0,5;10] par : $f(x)=ax+2+b\ln(x)$ où a et b sont des nombres réels.
On note f' la fonction dérivée de f.
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

. la courbe représentative Γ de la fonction f ;
. la droite d tangente à la courbe Γ au point A de coordonnées (1;1) ;
. la droite d' tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse 3.



On sait de plus que :

. la tangente du point A passe par le point E de coordonnées (0 ;-1).
. la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie A

1. Donner par lecture graphique la valeur de $f'(1)$, puis celle de $f'(3)$.
2. Calculer $f'(x)$
3. En déduire les valeurs des nombres a et b.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle [0,5;10] par : $f(x)=-x+2+3\ln(x)$.

1. Montrer que pour x dans [0,5;3] : $f'(x)=\dfrac{-x+3}{x}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.
3. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0,5;10], puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle
4. Montrer que sur l'intervalle [0,5;3] l'équation $f(x)=0$ admet une unique slution. Donner une valeur approchée arrondie au centième.
5. Un logiciel de calcul formel nous donne le résultat suivant :

1	Intégrer[3ln(x)-x+2]
	$3xln(x)-x-\dfrac{x^2}{2}$

Calculer, en unités d'aire, l'aire S du domaine délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=8.
On donnera la valeur exacte de S puis sa valeur arrondie au centième.

Partie C

Tom observe que sur le dessin précédent, la courbe représentative de f est située en dessous des deux tangentes aux points A et B.
Il affirme :
« La courbe représentative de f sur l'intervalle [0,5;10] est entièrement situé en dessous de chacune de ses tangentes ».
Démontrer que l'affirmation de Tom est exacte.

CORRECTION

Partie A

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0,5;10] : $f(x)=ax+2+b\ln(x)$.

1. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente d à Γ aupoint A de coordonnées (1;1) ; cette droite passe par le point E(0 ;-1).

$f'(1)=\frac{1-(-1)}{1-0}=2$

$f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente à Γ au point d'abscisse 3, cette tangente est horizontale.

$f'(3)=0$

2. $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$

f est dérivable sur [0,5;10]

$f'(x)=a+b\times\frac{1}{x}=\frac{ax+b}{x}$

3. $f'(1)=a+b=2$

$f'(3)=\frac{3a+b}{3}=0$ donc $3a+b=0$

$\begin{cases} a+b=2 \\ 3a+b=0 \end{cases}$ on obtient $-2a=2$ soit $a=-1$ et $b=3$

Conclusion

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5;10]$: $f(x)=-x+2+3\ln(x)$

Partie B

1. f est dérivable sur [0,5;10]

$f'(x)=-1+\frac{3}{x}=\frac{-x+3}{x}$

2. $f'(1)=\frac{-1+3}{1}=2$

$f(1)=-1+2+3\ln(1)=1$

d : y-1=2(x-1)

d : y=2x-1

3. Le signe de $f'(x)$ sur $[0,5;10]$ est le signe de (-x+3)

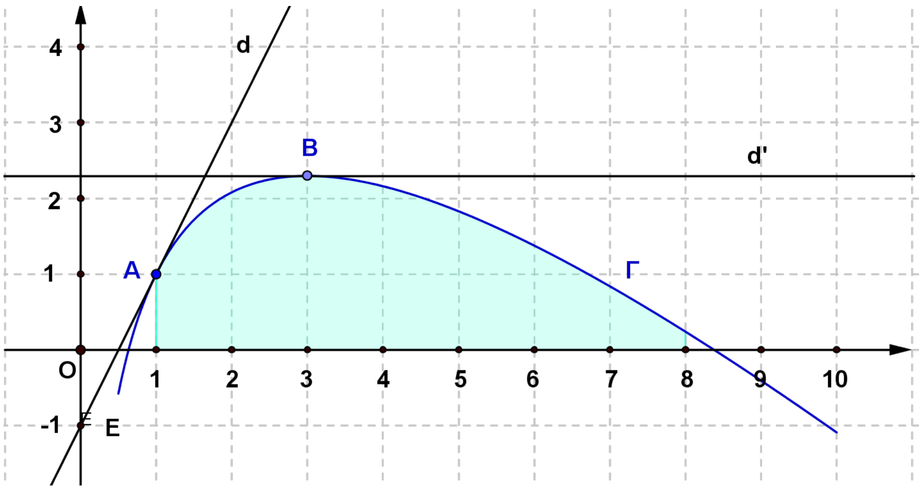
$f'(3)=0$ Si $0,5\leqslant x<3$ alors $f'(x)>0$ Si $3<x\leqslant 10$ alors $f'(x)<0$

x	0.5		3		10
f '(x)		+	0	−	
f(x)	1.5+3ln(0.5)	↗	-1+3ln(3)	↘	-8+3ln(10)

$f(0,5)=1,5+3\ln(0,5)=-0,58$ à 10^{-2} près
$f(10)=-8+3\ln(10)=-1,09$ à 10^{-2} près
$f(3)=-1+3\ln(3)=2,30$ à 10^{-2} près

4. f est continue et strictement croissante sur [0,5;3], f(0,5)< 0 et f(3) >0, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution α appartenant à l'intervalle [0,5;3].
En utilisant la calculatrice, on obtient :
f(0,6)=-0,13 < 0 et f(0,7)=0,23 > 0 donc $0,6<\alpha<0,7$
f(0,63)=-0,02 < 0 et f(0,64)=0,02 > 0 donc $0,63<\alpha<0,64$
On vérifie que f(0,635) > 0 donc **0,63** est la valeur approchée de α arrondie au centième.

5. Le logiciel de calcul formel nous donne :
$F(x)=3x\ln(x)-x-\frac{x^2}{2}$ avec F primitive de f sur l'intervalle [0,5;10].
Graphiquement, on remarque que la courbe Γ est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle [1;8] donc f est positive sur l'intervalle [1;8] et l'aire S (en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=8 (domaine coloré en bleu sur la figure suivante) est :



$S=\int_1^8 f(x)\,dx = F(8)-F(1).$

$S=24\ln(8)-8-\frac{64}{2}-3\ln(1)+1+\frac{1}{2}=24\ln(8)-40+1,5=24\ln(8)-38,5$ U.A.

En utilisant la calculatrice :
S=11,41 à 10^{-2} près

Partie C

Tom affirme que la fonction f est concave sur l'intervalle [0,5;10].
f est deux fois dérivable sur [0,5;10]

$f'(x)=\frac{-x+3}{x}=-1+\frac{3}{x}$

$f''(x)=\frac{-3}{x^2}<0$

Donc **f est concave sur [0,5;10] et l'affirmation de Tom est exacte.**