Exercice 2 7 points

Une entreprise s'intéresse au nombre d'écrans 3D qu'elle a vendus depuis 2010 :

Année	2010	2011	2012
Nombre d'écrans 3D vendus	0	5000	11000

Le nombre d'écrans 3D vendus par l'entreprise l'année (2010+n) est modélisée par une suite (u_n) arithmético-géométrique de premier terme $u_0=0$.
On rappelle que une suite athmético-géométrique vérifie, pour tout entier naturel n, une relation de récurrence de la forme $u_{n+1}=a\times u_n+b$ où a et b sont deux réels.

1.a. En supposant que $u_1=5000$, déterminer la valeur de b.
1.b. En supposant de plus que $u_2=11000$, montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=1{,}2\times u_n+5000$

2.a. Calculer u_3 et u_4.
2.b. En 2013 et 2014, l'entreprise a vendu respectivement 18000 et 27000 écrans 3D.
La modélisation semble-t-elle pertinente ?

Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que le modèle est une bonne estimation du nombre d'écrans 3D que l'entreprise va vendre jusqu'en 2022.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n=u_n+25000$.
3.a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2.
Préciser la valeur de son premier terme v_0.
3.b. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n=25000\times 1{,}2^n-25000$.

4. On souhaite connaître la première année pour laquelle le nombre de vents d'écrans 3D dépassera 180000 unités.
4.a. Prouver que résoudre l'inéquation : $u_n>18000$ revient à résoudre $1{,}2^n>8{,}2$.
4.b. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il détermine et affiche le plus petit entier naturel n, solution de l'inéquation $1{,}2^n>8{,}2$.

```
Variables :        N est un entier naturel
                   W est un nombre réel
Initialisation :   N prend la valeur 0
                   W prend la valeur . . . .
Traitement :       Tant que . . . .
                       W prend la valeur Wx1,2
                       . . . . . .
                   Fin Tant que
Sortie :           Afficher . . . .
```

4.c. Déterminer cet entier naturel
4.d. A partir de 2023, l'entreprise prévoit une baisse de 15 % par an du nombre de ses ventes d'écrans 3D.
Combien d'écrans 3D peut-elle prévoir de vendre en 2025 ?

CORRECTION

1.a. En utilisant la relation de récurrence pour n=0

$u_1 = a \times u_0 + b \quad u_1 = 5000 \quad$ et $\quad u_0 = 0$

donc $5000 = a \times a \times 0 + b$ et **$b = 5000$.**

1.b. En utilisant la relation de récurrence pour n=1

$u_2 = a \times u_1 + b \quad u_2 = 11000 \quad u_1 = b = 5000$

$11000 = 5000a + 5000 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{6000}{5000} = \mathbf{1{,}2.}$

<u>Conséquence :</u>

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n + 5000$

2.a. $u_3 = 1{,}2u_2 + 5000 = 1{,}2 \times 11000 + 5000 = \mathbf{18200}$

$u_4 = 1{,}2 \times 18200 + 5000 = \mathbf{26400}$

2.b. **La modélisation semble pertinente.**

3. Pour tout entier naturel n

$v_n = u_n + 25000 \quad$ donc $\quad u_n = v_n - 25000$

3.a. Pour tout entier naturel n

$v_{n+1} = u_{n+1} + 25000 = 1{,}2u_n + 5000 + 25000 = 1{,}2(v_n - 25000) + 30000 = 1{,}2v_n - 30000 + 30000$

$v_{n+1} = 1{,}2v_n$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2 et de premier terme $v_0 = u_0 + 25000 = 25000$.

3.b. Pour tout entier naturel n

$v_n = v_0 \times q^n = 25000 \times 1{,}2^n$

Or $u_n = v_n - 25000$

donc $u_n = 25000 \times 1{,}2^n - 25000$

4.a. $u_n > 180000 \quad \Leftrightarrow \quad 25000 \times 1{,}2^n - 25000 > 180000 \quad \Leftrightarrow \quad 25000 \times 1{,}2^n > 205000$

$\Leftrightarrow \quad 1{,}2^n > \frac{205000}{25000} = 8{,}2$

4.b.

Variables :	N est un entier naturel
	W est un nombre réel
Inialisation :	N prend la valeur 0
	W prend la valeur **1**
Traitement :	Tant que **W** $\leqslant$ **8,2**
	W prend la valeur Wx1,2
	N prend la valeur N+1
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher **N**

4.c. On résout l'inéquation $1{,}2^n > 8{,}2$

ln est strictement croissante

donc $\ln(1{,}2^n) > \ln(8{,}2) \quad \Leftrightarrow \quad n \times \ln(1{,}2) > \ln(8{,}2)$

$1{,}2 > 1$ donc $\ln(1{,}2) > \ln(1) = 0$

$n > \frac{\ln(8{,}2)}{\ln(1{,}2)}$

$\frac{\ln(8{,}2)}{\ln(1{,}2)} = 11{,}54$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel

donc $n \geqslant 12$

Le plus petit entier naturel n tel que $1{,}2^n \geqslant 8{,}2$ est 12.

On peut aussi déterminer cette valeur en utilisant l'algorithme.

En 2022, lestimation du nombre d'écrans 3D vendus est : $u_{12}=25000\times1,2^{n}-25000$ = **197903** à l'unité près ;

4.d. A partir de 2023, l'entreprise prévoit une baisse de 15 % par an du nombre d'écrans 3D vendus.

L'estimations des ventes d'écrans 3D en 2023 sera $(1-015)\times u_{12}$, en 2024 $(1-0,15)^2\times u_{12}$ et en 2025 $(1-0,15)^3\times u\,12=0,85^3\times197903$ = **121587.**