Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

On rappelle que $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

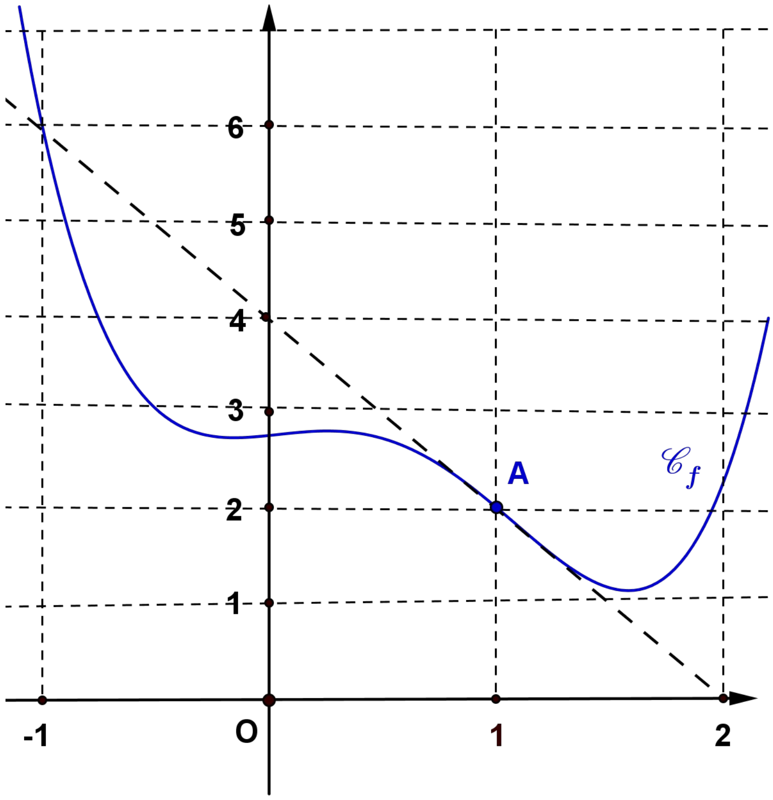
1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln(x)-x+1$.

Affirmation A : La fonction f est croissante sur l'intervalle]0;1[.

Affirmation B : La fonction f est convexe sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Affirmation C : Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)<50$

2. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ définie sur $\mathbb{R}$.
On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on rappelle que g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.
On a tracé en pointillé la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point A de cette courbe, d'abscisse 1 de d'ordonnée 2 . Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.



Affirmation D : $g'(1)=-2$

Affirmation E : $\int_0^1 g(x)\,dx < 3$

CORRECTION

1.

Affirmation A : $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Justification

f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$

$f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}-1=\ln(x)+1-1=\ln(x)$

Si $0 < x < 1$ alors $\ln(x) < \ln(1) = 0$

donc f' est négative sur]0;1[et f est décroissante sur]0;1[.

Et **l'affirmation A est fausse.**

Affirmation B : $\boxed{\text{VRAIE}}$

Justification

f' est dérivable sur $]0;+\infty[$

$f''(x)=(\ln(x))'=\frac{1}{x}>0$

donc la fonction f est convexe sur $]0;+\infty[$

Et **l'affirmation B est vraie.**

Affirmation C : $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Justification

On peut remarquer que $f(x)=x(\ln(x)-1)+1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Il suffit de déterminer, en utilisant la calculatrice, une valeur de x telle que f(x) > 50.

Exemple : f(50) = 146,6 à 10^{-1} près.

Et **l'affirmation C est fausse.**

2.

Affirmation D : $\boxed{\text{VRAIE}}$

Justification

$g'(1)$ est égal au coefficient directeur a de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point A d'abscisse 1.

T passe par les points $A(1;2)$ et $B(2;0)$

$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-2}{2-1}=-2$

Et **l'affirmation D est vraie.**

Affirmation E : $\boxed{\text{VRAIE}}$

justification

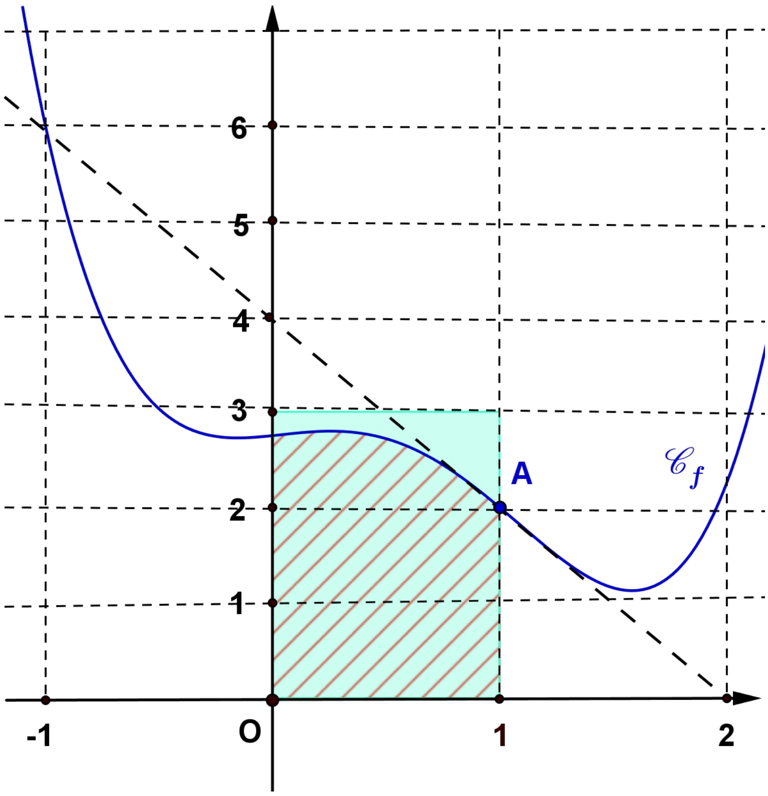
f est continue et positive sur [0;1], donc $\int_0^1 g(x)\,dx$ est l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations x=0 et x=1. (Cette partie est hachurée en rouge sur la figure suivante).

Cette partie est contenue dans le rectangle coloré en bleu d'aire trois unités d'aire.

Conclusion :

$\int_0^1 g(x)\,dx < 3$

Et **l'affirmation E est vraie.**


6
5
4
3
2
1
-1
O
1
2
A
$\mathscr{C}_f$