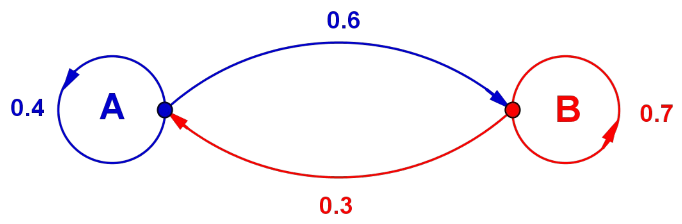
Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle set vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

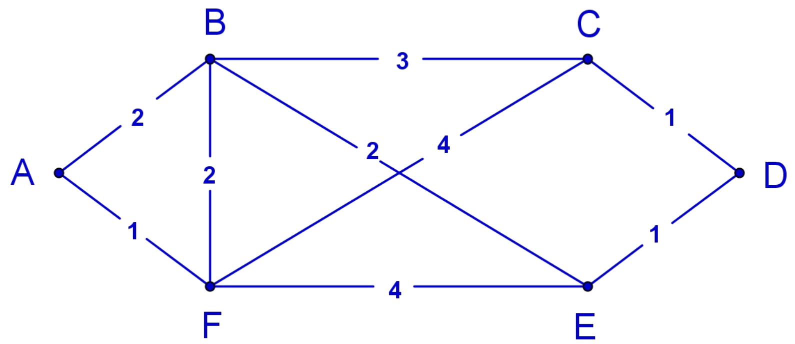
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On donne le graphe probabiliste suivant :



Affirmation A : L'état stable associé à ce graphe est: $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2. On donne le graphe pondéré G suivant :



Affirmation B : il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe.

Affirmation C : La plus courte chaîne entre les sommets A et D est une chaîne de poids 5.

3. On considère la matrice :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose que M est la matrice d'adjacence d'un graphe à quatre sommets A, B, C et D dans cet ordre.

Affirmation D : il existe exactement 3 chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D.

4. On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Affirmation E : il existe un nombre réel a pour lequel B est l'inverse de A.

CORRECTION

1. Affirmation A : $\boxed{\text{FAUSSE}}$

justification

L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique.

La matrice de transition du graphe est : $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le pods de l'arête AA : 0,4
m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,6
m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,3
m_{22} est le poids de l'arête BB : 0,7

$M=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ est l'état stable si et seulement si $\begin{cases} a+b=1 \\ PM=P \end{cases}$

$PM=P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,4a+0,3b=a \\ 0,6a+0,7b=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3b=0,6a \\ 0,3b=0,6a \end{cases} \Leftrightarrow \{b=2a$

$\begin{cases} a+b=1 \\ b=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a=1 \\ b=2a \end{cases}$

$a=\frac{1}{3} \quad b=\frac{2}{3} \quad P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

L'affirmation A est fausse

2. Affirmation B : $\boxed{\text{VRAIE}}$

Justification

Une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes du graphe est une chaîne eulérienne.

Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

On détermine le degré de chaque sommet, on donne les résultats sous forme de tableau.

Sommets	A	B	C	D	E	F
Degrés	2	4	3	2	3	4

Il y a dix sommets et deux seulement de degré impair donc il existe une chaîne eulérienne. (Les deux extrémités d'une telle chaîne sont les sommets de degré impair)

Exemple : **C-F-A-B-C-D-E-F-B-E**

L'affirmation B est vraie.

Affirmation C : $\boxed{\text{VRAIE}}$

Justification

Pour déterminer la plus courte chaîne entre les sommets A et D, on utilise l'algorithme de Dijkstra.

A	B	C	E	F	D
0	∞	∞	∞	∞	∞
0	2(A)	∞	∞	1(A)	∞
	2(A)	5(F)	5(F)	1(A)	∞
	2(A)	5(F)	4(B)		∞
		5(F)	4(B)		5(E)
		5(F)			5(E)
					5(E)

La plus courte chaîne reliant A à D est une chaîne de poids **5.**

Exemple : **A-B-E-D**

L'affirmation C est vraie.

3. Affirmation D : $\boxed{\textbf{FAUSSE}}$

Justification

M est la matrice d'adjacence d'un graphe à quatre sommets A, B, C et D dans cet ordre.

Les nombres de chaînes de longueur 4 reliant deux sommets du graphe sont les coefficients de la matrice :

$M^4=\begin{pmatrix}7 & 6 & 4 & 6\\ 6 & 11 & 2 & 6\\ 4 & 2 & 3 & 4\\ 6 & 6 & 4 & 7\end{pmatrix}$ que l'on obtient en utilisant la calculatrice.

Le nombre de chaînes de longueur 4 reliant les sommets B et D est **6.**

L'affirmation D est fausse.

Affirmation E : $\boxed{\textbf{VRAIE}}$

Justification

B est l'inverse de A si et seulement si $A\times B=B\times A=I$.

$A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$ $\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A\times B=\begin{pmatrix}-a & 0\\ 0 & a^2\end{pmatrix}$

$A\times B=I \Leftrightarrow \begin{cases}-a=1\\ a^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \{a=-1$

$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$A=B$ donc $B\times A=I$

L'affirmation E est vraie.