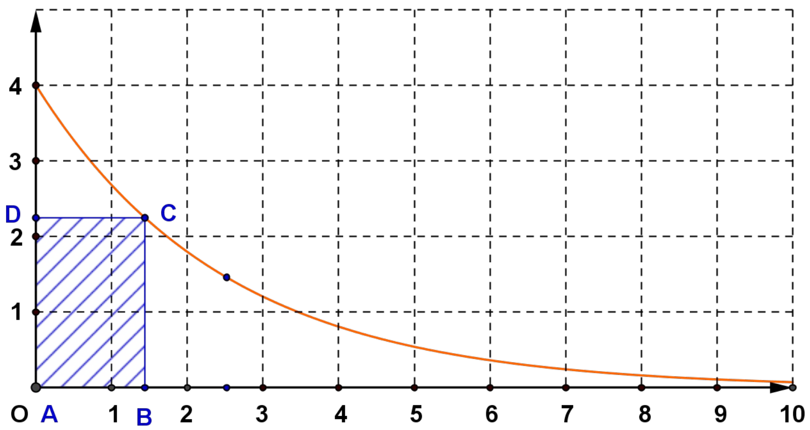
Exercice 4 — 3 points

Un publicitaire envisage la pose d'un panneau rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [0;10] par :

$f(x)=4e^{-0,4x}$.

Cette courbe $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O :
(l'unité de longueur est le mètre)



Le rectangle ABCD représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes : le point A est situé à l'origine du repère, le point B est sur l'axe des abscisses, le point D est sur l'axe des ordonnées et le point C est sur la courbe $\mathscr{C}_f$.

1. On suppose dans cette question que le point B a pour abscisse $x=2$.
Montrer qu'une valeur approchée de l'aire du panneau publicitaire est $3,6\,m^2$.

2. Parmi tous les panneaux qui répondent aux contraintes de l'énoncé, quelles sont les dimensions de celui dont l'aire est la plus grande possible ?
On donnera les dimensions d'un tel panneau au centimètre près.

CORRECTION

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;10] : $f(x)=4e^{-0,4x}$.
L'unité de longueur es le mètre. Le repère est orthonormal. L'unité d'aire est le mètre carré.

1. $B(2;0)$ $C(2;f(2))$

L'aire du rectangle ABCD en m^2 est $2\times f(2)$ et $f(2)=4e^{-0,8}$.

L'aire du panneau publicitaire est : $2\times 4e^{-0,8}=8\times e^{-0,8}$ = **3,6** m^2 à 10^{-1} près.

2. $B(x:0)$ $C(x;f(x))$ x appartient à l'intervalle [0;10].

L'aire du rectangle ABCD en m^2 est : $g(x)=x\times f(x)=4xe^{-0,4x}$

g est dérivable sur [0;10]

$(e^{-0,4x})'=-0,4e^{-0,4x}$

$g'(x)=4e^{-0,4x}+4x(-0,4e^{-0,4x})=4e^{-0,4x}(1-0,4x)$

Le signe de $g'(x)$ sur [0;10] est le signe de $(1-0,4x)$.

$1-0,4x\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1\geqslant 0,4x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{0,4}\geqslant x \quad\Leftrightarrow\quad 2,5\geqslant x$

On donne les variations de g sous la forme d'un tableau :

x	0		2.5		10
g'(x)		+	0	−	
g(x)		↗	$\frac{10}{e}$	↘	

Le maximum de g sur [0;10] est $g(2,5)=4\times 2,5e^{-1}=\frac{10}{e}$

Les dimensions du rectangle ABCD sont alors : AB=**2,5m** et $BC=4e^{-1}=\frac{4}{e}$ = **1,47m** à 10^{-2} près.

L'aire du rectangle ABCD est égale : $\frac{10}{e}$ = 3,68 m^2 **à** 10^{-2} près.