Exercice 2 6 points

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

L'entreprise *BBE* (*Bio Bois Energie)* fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez les particuliers ou dans les collectivités.
L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

- Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle [1;15] par : $C(x)=0{,}3x^2-x+e^{-x+5}$ où x désigne la quantité de granulés en tonnes et C(x) le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.
- Dans l'entreprise *BBE* Le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros. La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle [1;15] par : $R(x)=3x$ où x désigne la quantité de granulés en tonnes et R(x) la recette quotidienne en centaines d'euros.
- On définit par D(x) le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est à dire la différence entre la recette R(x) et le coût C(x) où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

Partie A : Etude graphique

Sur le graphique situé en annexe, on donne $\mathscr{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.
Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permide par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer la quantité de grannulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.

2.a. Déterminer les valeurs C(6) et R(6) puis en déduire une estimation du résultat net au quotidien en euros dégagés par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.

b. Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est à dire un bénéfice.

Partie B : Etude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle [1;15] par : $g(x)=-0{,}6x+4+e^{-x+5}$.
On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle [1;15] et on note g' sa fonction dérivée.

1.a. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle [1;15] .

b. En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle [1;15].

2.a. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle [1;15], en précisant les valeurs g(1) et g(15) arrondies à l'unité.

b. Le tableau de variation permet d'affirmer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [1;15].
Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

c. Déduire des questions précédentes le tableau de signe de g(x) sur l'intervalle [1;15].

Partie C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle [1;15], on a : $D(x)=-0{,}3x^2+4x-e^{-x+5}$

2. On admet que la fonction D est dérivable sur [1;15] et on note D' sa fonction dérivée.

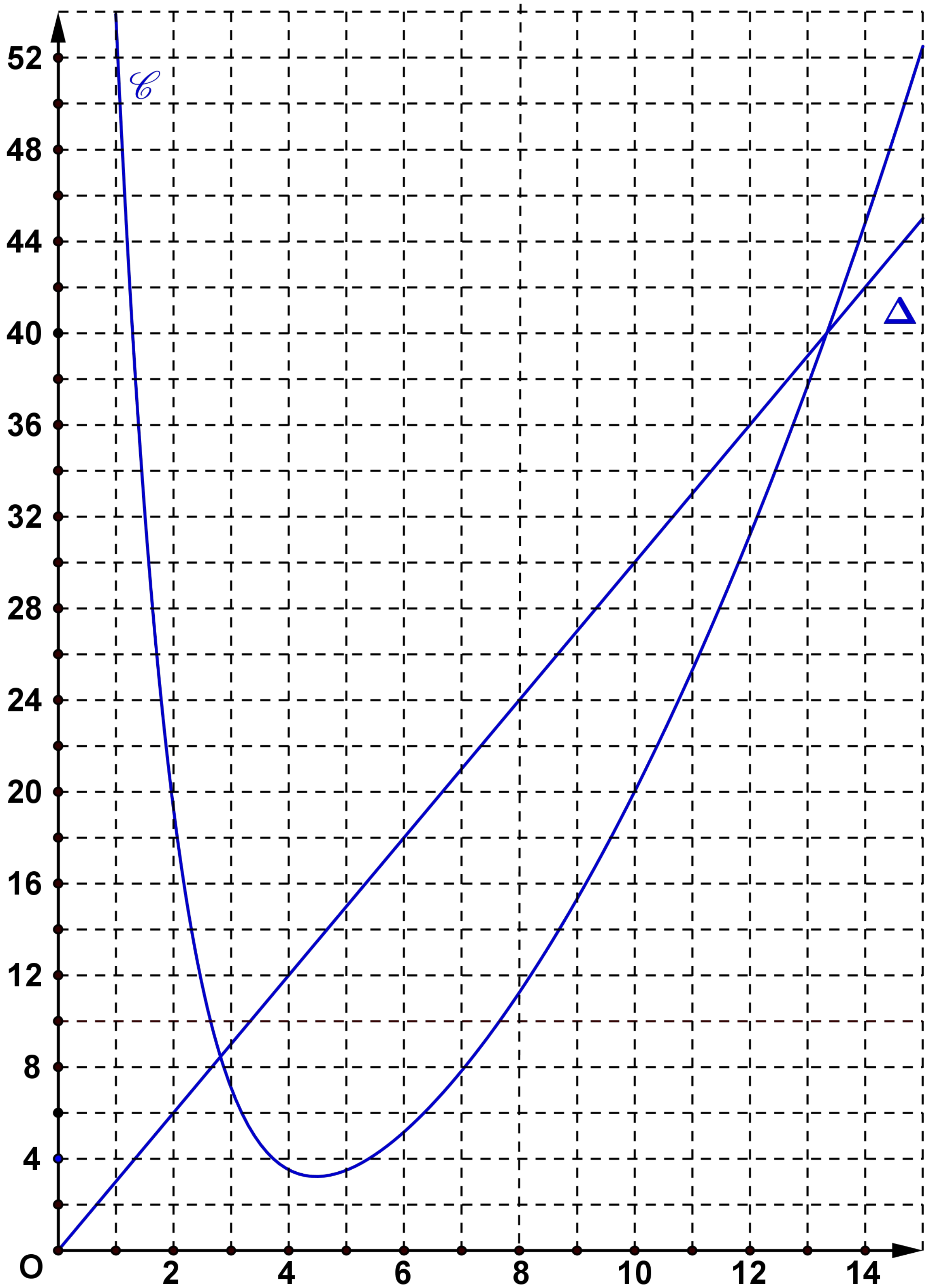
Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle [1;15], on a $D'(x)=g(x)$, où g est la fonction étudiée dans la partie B.

3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle [1;15].

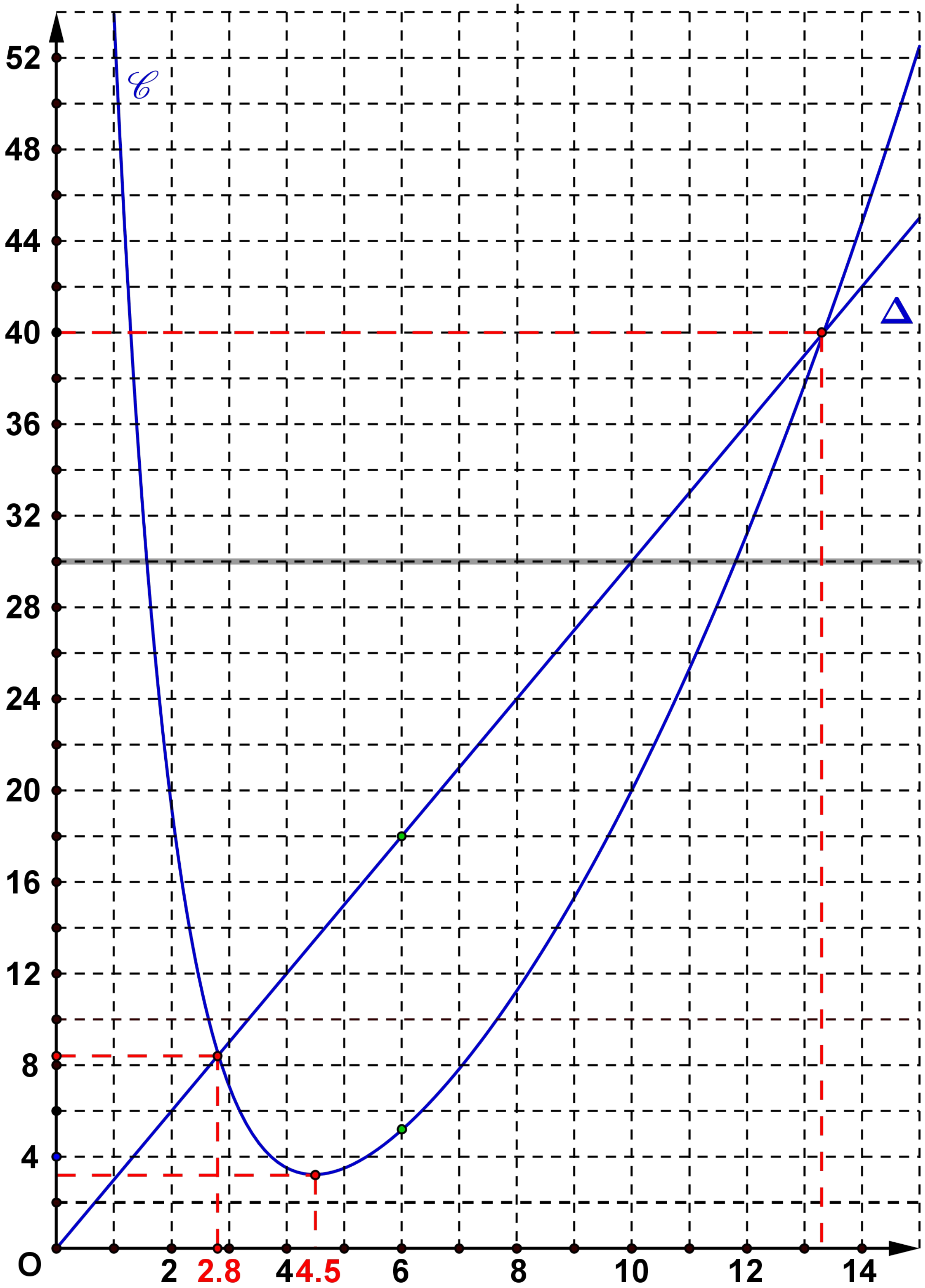
4.a. Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal ?
On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1 tonne près.

b. Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.

ANNEXE



CORRECTION



1. On détermine l'abscisse du point de la courbe $\mathscr{C}$ ayant l'ordonnée minimale, on obtient : **4,5.**

2.a. $C(6)=5$ $R(6)=18$ et $D(6)=13$

b. On détermine graphiquement la position de $\mathscr{C}$ et Δ .

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ sont 2,8 et 13,3 et $\mathscr{C}$ est en dessous de Δ si et seulement si x appartient à]2,8;13,3[.
$D(x)=R(x)-C(x)\geqslant 0$ si et seulement si x appartient à]2,8;13,3[.
Conclusion
L'entreprise *BBE* dégage un bénéfice un jour si et seulement si elle fabrique et vend entre 2,8 tonnes et 13,3 tonnes de granulés pour ce jour.

Partie B : Etude d'une fonction

1.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;15] : $g(x)=-0{,}6x+4+e^{-x+5}$
g est dérivable sur [1;15]
$(e^u)'=u'e^u$ donc $(e^{-x+5})'=-e^{-x+5}$
et pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;15] on a $g'(x)=-0{,}6-e^{-x+5}$

b. Or $e^{-x+5}>0$ et $-e^{-x+5}<0$
et pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;15], $g'(x)<0$
Conclusion
g est stictement décroissante sur [1;15].

2.a. En utilisant la calculatrice : $g(1)=58$ à l'unité près et $g(15)=-5$ à l'unité près.
Tableau de variation de g

x	1	α	15
g'(x)		−	
g(x)	58	0	-5

b. g est continue est strictement décroissante sur [1;15] et $g(15)<0<g(1)$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet que 0 admet un unique antécédent α par g appartenant à l'intervalle [1;15] c'est à dire que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle [1;15].
En utilisant la calculatrice, on obtient : $g(6)=0{,}77$ et $g(7)=-0{,}06$ donc $6<\alpha<7$
$g(6{,}9)=0{,}01$ et $g(7)=-0{,}06$ donc $6{,}9<\alpha<7$
Conclusion
6,9 est une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

c. g est strictement décroissantesur [1:15].
Si $1\leqslant x<\alpha$ alors $g(x)>g(\alpha)=0$
Si $\alpha<x\leqslant 15$ alors $g(\alpha)=0>g(x)$
On obtient le tableau de signe de g(x) sur [0;15].

x	1	α	15
g(x)	+	0	−

Partie C : Application économique

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;15] on a :
$D(x)=R(x)-C(x)=3x-0{,}3x^2+x-e^{-x+5}=-0{,}3x^2+4x-e^{-x+5}$

2. D est dérivable sur [1;15]

$D'(x) = -0{,}3 \times (2x) + 4 - (-e^{-x+5}) = -0{,}6x + 4 - e^{-x+5} = g(x)$

3. On utilise le tableau de signe de g, et $D(1) = 50{,}9$; $D(15) = -7{,}5$; $D(\alpha) = 13{,}17$

Tableau de vatiation de D

x	1		α		15
g(x)		+	0	–	
D(x)	-50.9	↗	13.17	↘	-7.5

4.a. **Le bénéfice est maximal pour la fabrication et la vente de α tonnes de granulés de bois soit 6,9 tonnes.**

b. **Ce bénéfice est égal à 13,17 centaines d'euros soit 1317 €.**