## Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

En janvier 2016, une personne se décide à acheter un scooter coûtant 5700 euros sans apport personnel. Le vendeur lui propose un crédit à la consommation d'un montant de 5700 euros, au taux mensuel de 1,5 %. Par ailleurs, la mensualité fixée à 300 euros est versée par l'emprunteur à l'organisme de crédit le 25 de chaque mois. Ainsi, le capital restant dû augmente de 1,5 %puis baisse de 300 euros.
Le premier versement a lieu le 25 février 2016.
On note $u_n$ le capital restant dû en euros juste après la $n^{ième}$ mensualité (n entier naturel non nul).
On convient que $u_0=5700$ .
Les résultats seront donnés sous forme approchée à 0,01 près si nécessaire.

**1.a.** Démontrer que $u_1$ , capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de 5485,50 euros.
**b.** Calculer $u_2$

**2.** On admet que la suite $(u_n)$ est définie pour tout entier n par :
$u_{n+1}=1,015\,u_n-300$
On considère l'algorithme suivant :

**Variables :** n est un entier naturel
u est un nombre réel
**Traitement :** Affecter à u la valeur 5700
Affecter à n la valeur 0
Tant que $u>4500$ faire
u prend la valeur $1,015\times u-300$
n prend la valeur n+1
Fin tant que
**Sortie :** Afficher n

**a.** Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaires entre la deuxième et la dernière colonne.

| Valeur de u | 5700 | – – – | | |
|---|---|---|---|---|
| Valeur de n | 0 | – – – | | |
| u > 4500 | vrai | – – – | vrai | faux |

**b.** Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

**3.** Soit la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-20000$
**a.** Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1}=1,015\times v_n$
**b.** En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n=20000-14300\times 1,015^n$

**4.** A l'aide de la réponse précédente, répondre aux questions suivantes :
**a.** Démontrer qu'une valeur approchée du capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est 2121,68 euros.
**b.** Déterminer le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt.
**c.** Quelle sera le montant de la dernière mensualité ?
**d.** Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation, quel sera le coût total de son achat ?

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

**CORRECTION**

**1.a.** Le capital restant dû initial est 5700 euros

donc $u_1=5700+\frac{15}{100}\times 5700-300=5400+1,5\times 57$ = **5485,50 euros.**

**b.** $u_2=5485,50+5485,50\times\frac{1,5}{100}-300$ = **5267,78**

**2.a.** On calcule les termes successifs de la suite

$u_3=u_2\times 1,015-300=5046,80$

$u_4=u_3\times 1,015-300=4822,50$

$u_5=u_4\times 1,015-300=4594,84$

$u_6=u_5\times 1,015-300=4363,76$

$u_6<4500$

On donne les résultats sous la forme d'un tableau

| Valeur de u | 5700 | 5485.50 | 5267.78 | 5046.80 | 4822.50 | 4594.84 | 4363.76 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeur de n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| u > 4500 | vrai | vrai | vrai | vrai | vrai | vrai | faux |

**b.** La valeur affichée est : 6.

Au 26 juillet 2016, le capital dû sera pour la première fois inférieur à 4500.

**3.a.** Pour tout entier naturel n non nul $v_n=u_n-20000$ ( donc $u_n=20000+v_n$ ).

$v_{n+1}=u_{n+1}-20000=1,015\,u_n-300-20000=1,015\,u_n-20300$

$v_{n+1}=1,015(20000+v_n)+20300=20300+1,015\,v_n-20300$

$v_{n+1}=1,015\,v_n$

donc $(v_n)$ est la suite géométrique de raison 1,015 et de premier terme $v_0=u_0+20000$

$=5700-20000$ = **-14300**

**b.** Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0\times q^n=-14300\times(1,015)^n$

et $u_n=20000+v_n$

donc $u_n=20000-14300\times(1,015)^n$

**4.a.** Au 25 avril 2017, la personne aura payé sa $15^{\text{ième}}$ mensualité donc le capital restant dû au 26 avril 2017 est : $u_{15}=20000-14300\times(1,015)^{15}$ = **2121,68** à $10^{-2}$ près.

**b.** Le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt est le plus petit entier naturel n tel que $u_n\leqslant 0$ .

$20000-14300\times(1,015)^n\leqslant 0 \Leftrightarrow 20000\leqslant 14300\times(1,015)^n \Leftrightarrow \frac{20000}{14300}\leqslant(1,015)^n$

ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{200}{143}\right)\leqslant \ln(1,015)^n \Leftrightarrow \ln\left(\frac{200}{143}\right)\leqslant n\times\ln(1,015)$

$1,015>1$ donc $\ln(1,015)>0$

$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{200}{143}\right)}{\ln(1,015)}\leqslant n$

En utilisant la calculatrice

$\Leftrightarrow 22,53\leqslant n$

n est un entier naturel

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$\Leftrightarrow 23 \leqslant n$

**Il faudra donc 23 mensualités pour rembourser intégralement le prêt**
**Donc le 26 décembre le prêt sera intégralement remboursé.**

**c.** On détermine $u_{22}$ c'est le capital dû au 26 novembre 2017

$u_{22} = 20000 - 14300 \times (1{,}015)^{22} = 157{,}84$

Au 25 décembre 2017 il restera à payer $157{,}84 \times 1{,}015$ = **160,21 euros.**

**d.** La personne a payé 22 mensualités de 300 euros et une mensualité de 160,21 euros
$22 \times 300 + 160{,}21 = 6600 + 160{,}21$ = **6760,21 euros**

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés